BIBLIOTEKA PRIMIJENJENE MEHANIKE – Svezak 3

Znak: 8916 Sv

Izdanje:
Prof. dr. IVO ALFIREVIĆ
NAUKA O ČVRSTOĆI I

Urednik biblioteke:
Prof. dr. IVO ALFIREVIĆ

Stručni recenzenti:
Prof. dr. IVAN HEIDL
Prof. dr. MIRKO BUTKOVIĆ

Izdavač:
IZDAVAČKA RADNA ORGANIZACIJA
TEHNIČKA KNJIGA
Zagreb, Jurišićeva 10

Za izdavača odgovara:
Ing. ZVONIMIR VISTRIČKA

Urednik izdanja:
Ing. TOMISLAV STRUJIĆ

Tisak:
BIROGRAFIKA, Subotica

Tiskano u 2000 primjeraka

Tisak dovršen:
U KOLOVOZU 1989.

YU ISBN 86-7079-092-1

Prof. dr. IVO ALFIREVIĆ

redovni profesor Fakulteta strojarstva i brodogradnje, Sveučilišta u Zagrebu

NAUKA O ČVRSTOĆI

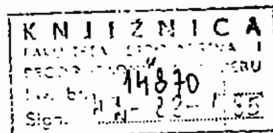
I

TEHNIČKA KNJIGA
ZAGREB

Štulhofer, red. prof. VTŠ KoV Zagreb. Recenzenti ovog izdanja su dr. Ivan Heidl i dr. Stjepan Jecić, red. profesori Fakulteta strojarstva i brodogradnje u Zagrebu. Svi su mi oni dali mnoge korisne primjedbe i savjete, što je pridonijelo kvaliteti udžbenika. Njima i ostalima koji nisu spomenuti zahvaljujem za pruženu pomoć.

Zagreb, 19. ožujka 1989. Autor

SADRŽAJ



Ovo je djelo izdano uz novčanu pomoć Samoupravne interesne zajednice znanosti SR Hrvatske kao društveno vrijedna znanstvena knjiga.

PREDGOVOR

Katedra za mehaniku i čvrstoću Fakulteta strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu u suradnji s „Tehničkom knjigom" pokrenula je izdavanje biblioteke PRIMIJENJENA MEHANIKA. Zadatak je i svrha ove serije da osigura udžbenike iz područja mehanike, u najširem smislu, za studente tehničkih fakulteta, u prvom redu za studente strojarstva, brodogradnje, građevinstva, prometa i drugih, te da stručnjacima u praksi pruži suvremenu i prikladnu literaturu potrebnu za rješavanje praktičnih problema.

U ovoj će se biblioteci obraditi gradivo dodiplomskih i postdiplomskih predmeta, te neka posebna područja. Uz pojedine udžbenike bit će izdane zbirke riješenih primjera i zadataka. Na kraju se predviđa Priručnik primijenjene mehanike koji će sadržavati popis definicija, teorema, formula, tablica i ostalih potrebnih podataka u sažetu obliku jer će se taj priručnik oslanjati na ovu biblioteku.

U izradi serije radit će više autora. Svaka će knjiga biti zaokružena cjelina. Autori će u izboru gradiva imati znatnu slobodu, pa može doći do manjeg preklapanja gradiva u pojedinim knjigama. Nastojat će se da terminologija, oznake i način izlaganja budu ujednačeni. Knjige neće izlaziti redoslijedom kako su označene u biblioteci, već prema potrebama korisnika i mogućnosti autora da dovrši tekst. Stručni urednik biblioteke je dr. Ivo Alfirević, redovni profesor Fakulteta strojarstva i brodogradnje u Zagrebu.

Prva izlazi iz tiska NAUKA O ČVRSTOĆI I koja je predviđena za istoimeni predmet na Fakultetu strojarstva i brodogradnje u Zagrebu, te na Fakultetu strojarstva i brodogradnje u Splitu. U sličnom opsegu predaje se taj predmet i na ostalim strojarskim i građevinskim fakultetima. Udžbenik je pisan nešto opsežnije nego je predviđeno u navedenom predmetu. To se odnosi u prvom redu na četrnaesto poglavlje o eksperimentalnim metodama analize naprezanja.

Knjiga je bogato ilustrirana crtežima i fotografijama. Ima ukupno 269 slika i 85 riješenih primjera, što olakšava razumijevanje izloženog gradiva. Primjeri su tako odabrani da se pomoću njih proširuje izložena teorija ili se primjerima ilustrira primjena teorije na stvarne probleme.

Ovo izdanje jest prošireno i popravljeno izdanje udžbenika Nauka o čvrstoći I što ga je izdala Sveučilišna naklada Liber 1978. U pripremi prethodnog izdanja pomagali su mi mr. Zdravko Vnučec i dr. Slobodan Tepić, tadašnji asistent odnosno student FSB u Zagrebu. Prvo i drugo izdanje su recenzirali dr. Ivan Heidl, dr. Vicko Šimić, red. prof. Fakulteta građevinskih znanosti u Zagrebu, i dr. Dragan

1. UVOD

1.1. Naziv i sadržaj nauke o čvrstoći

U nauci o čvrstoći obrađuju se metode proračuna čvrstoće, krutosti i stabilnosti dijelova konstrukcija i strojeva. *Čvrstoćom* konstrukcije ili dijela konstrukcije nazivamo sposobnost prenošenja opterećenja bez pojave loma. *Krutošću* konstrukcije nazivamo otpornost konstrukcije na deformiranje. Što se neka konstrukcija pod opterećenjem više deformira, njena je krutost manja. *Elastična stabilnost* konstrukcije jest sposobnost konstrukcije da zadrži početni ravnotežni oblik.

Osim naziva nauka o čvrstoći upotrebljava se i naziv otpornost materijala. Oba su naziva tradicionalna i ne odgovaraju stvarnosti. U okviru ovog predmeta ne proučava se otpornost ili čvrstoća materijala nego dijelova konstrukcija. Bolji naziv bio bi mehanika deformabilnih ili čvrstih tijela, tj. nauka o ponašanju realnih čvrstih tijela pod djelovanjem sila.

Opteretimo li čvrsto tijelo, pojavit će se u njemu unutrašnje sile, a tijelo će promijeniti oblik i dimenzije. U vezi s tim uvest ćemo pojmove naprezanja i deformacije. *Naprezanje* je unutrašnja sila podijeljena površinom na kojoj djeluje. *Duljinska deformacija* jest relativna promjena duljine, a *kutna deformacija* promjena pravog kuta.

U mehaniku krutih tijela uveli smo pojam idealiziranog krutog tijela. Analogno tome, definirat ćemo idealizirano čvrsto tijelo koje ima ova svojstva:

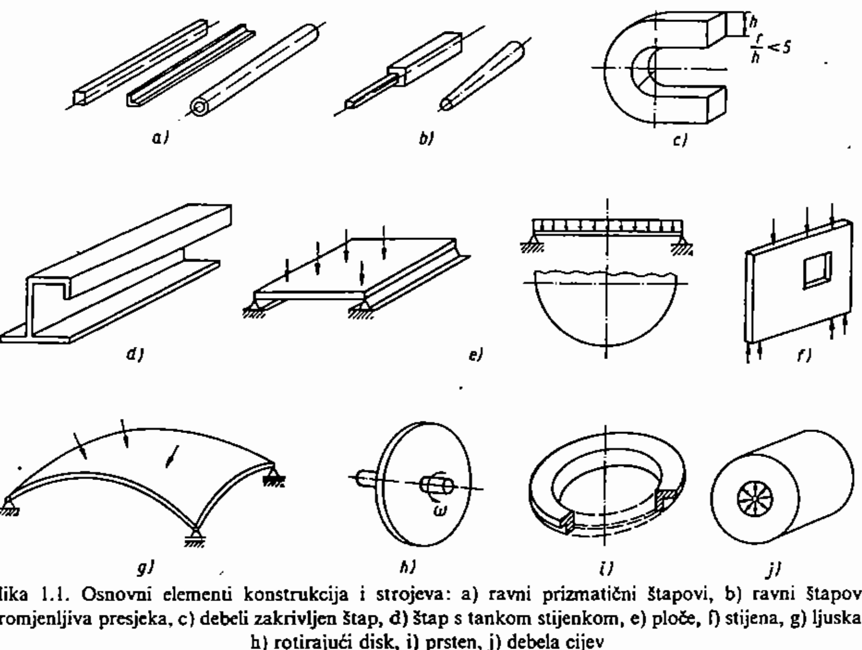
- tijelo je neprekinuto ili kontinuirano,
- tijelo je u cjelosti ili u pojedinim dijelovima homogeno,
- postoji točno određena veza između naprezanja i deformacija.

Iako znamo da su realna tijela sastavljena od atoma i molekula, u mehanici deformabilnih tijela uvodimo pretpostavku da je materija jednoliko i neprekinuto raspodijeljena po čitavu volumenu tijela. Ako su svojstva tijela u svim njegovim točkama jednaka, tijelo je homogeno, a ako se svojstva mijenjaju od točke do točke, tijelo je nehomogeno. Mijenjaju li se elastična ili neka druga svojstva ovisno o smjeru, kažemo da je tijelo anizotropno, a ako su svojstva u svim smjerovima ista, tijelo je izotropno. Drvo je npr. anizotropno jer ima različita svojstva u smjeru vlakanaca od svojstava u smjeru okomitom na vlakanca.

U nauci o čvrstoći razmatrat ćemo samo izotropna tijela, ako nije drukčije naglašeno. Idealizirana čvrsta tijela dijelimo na elastična, plastična i viskoelastična. *Elastično* se tijelo nakon rasterećenja potpuno vraća u početni oblik i veličinu. U *plastičnim* tijelima nakon rasterećenja zaostaju trajne ili plastične deformacije.

Viskoelastično tijelo karakterizira pojava *puzanja* i *relaksacije*, odnosno opadanja naprezanja. Opteretimo li viskoelastično tijelo konstantnim opterećenjem, u njemu će se pojaviti trenutno deformacije koje s vremenom rastu. Ta se pojava naziva puzanje. Ako viskoelastično tijelo deformiramo, pojavit će se u njemu unutrašnje sile koje s vremenom opadaju. Ta se pojava naziva relaksacija ili opadanje naprezanja.

Opći matematički pristup određivanju naprezanja i deformacija u tijelima proizvoljna oblika vrlo je složen problem i do danas nije još strogo riješen. Matematički pristup mehanici deformabilnih tijela izlaže se u okviru teorije elastičnosti, teorije plastičnosti i teorije viskoelastičnosti. Nauka o čvrstoći ne pristupa strogo rješavanju problema, nego uvodi pretpostavke o načinu deformiranja tijela i na temelju toga geometrijskom analizom određuje raspored deformacija, a zatim pomoću veza između naprezanja i deformacija određuje i raspored naprezanja, ali ne i veličinu naprezanja. Zatim pomoću uvjeta ravnoteže određuje i veličinu naprezanja i deformacija. Ako su pretpostavke o deformiranju potpuno ispunjene, rješenja koja daje nauka o čvrstoći podudaraju se sa strogim matematičkim rješenjima. Ako pretpostavke nisu potpuno ispunjene, rješenja nauke o čvrstoći nisu egzaktna; međutim, pogreška uz dana ograničenja rijetko prelazi pet posto. Većina



Slika 1.1. Osnovni elementi konstrukcija i strojeva: a) ravni prizmatični štapovi, b) ravni štapovi promjenljiva presjeka, c) debeli zakrivljen štap, d) štap s tankom stijenkom, e) ploče, f) stijena, g) ljuska, h) rotirajući disk, i) prsten, j) debela cijev

rješenja koje daje nauka o čvrstoći odnosi se na tijela jednostavna oblika: štapove, ploče, ljuske.

Štap je tijelo kojem su poprečne dimenzije malene u odnosu na uzdužnu. Štap može biti ravan ili zakrivljen, konstantnog ili promjenljivog poprečnog presjeka. *Ploče* i *ljuske* plošni su elementi konstrukcija kojima je debljina malena u odnosu na ostale dvije dimenzije. Ploče imaju ravnu središnju površinu, tj. površinu koja je jednako udaljena od obje vanjske površine. Kod ljuski je središnja površina zakrivljena. Na slici 1.1 prikazani su razni oblici štapova, ploča, ljuski i ostalih elemenata konstrukcija.

1.2. Zadaci i metode nauke o čvrstoći

U okviru nauke o čvrstoći rješavamo tri tipa zadataka:

1. Zadan je oblik konstrukcije, opterećenje i materijal od kojeg će konstrukcija biti izrađena, a treba odrediti poprečne dimenzije tako da budu zadovoljeni uvjeti čvrstoće, krutosti i stabilnosti.

Rješavanje tog zadatka naziva se dimenzioniranje. S tim se problemom vrlo često srećemo pri projektiranju i konstruiranju novih strojeva i uređaja.

2. Zadane su dimenzije i opterećenje, treba naći raspored naprezanja i deformacija i na temelju toga odabrati materijal koji ima potrebnu čvrstoću i ostala mehanička i elastična svojstva.

3. Za jednu već izvedenu konstrukciju treba odrediti dopušteno opterećenje. U tom slučaju poznate su nam dimenzije i svojstva materijala. Potrebno je izvršiti analizu naprezanja i deformacija i zatim odrediti dopušteno opterećenje.

Taj se zadatak pojavljuje kada želimo nekoj konstrukciji promijeniti namjenu. Npr. želimo li zgradu koja je sagrađena kao uredska pretvoriti u radionice, potrebno je provjeriti da li će podovi moći podnijeti novo opterećenje strojevima.

Vidimo da se u svim zadacima pojavljuju tri parametra:

– dimenzije konstrukcije,
– opterećenje,
– mehanička i elastična svojstva materijala.

Dva su parametra uvijek poznata ili ih slobodno biramo, dok treći određujemo metodama nauke o čvrstoći.

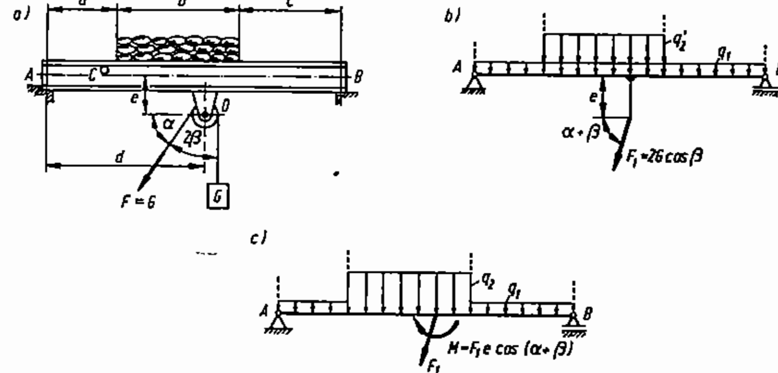
Na prvi se pogled čini da se jednostavno povećavanjem dimenzija dijelova konstrukcije mogu naprezanja dovoljno smanjiti, tako da budu zadovoljena sva tri uvjeta: čvrstoća, krutost i stabilnost. To, međutim, nije uvijek moguće jer u mnogim konstrukcijama vlastita težina, sile inercije i sl. predstavljaju glavni dio opterećenja, a te sile rastu s porastom dimenzija konstrukcije. Osim toga, povećanjem vlastite težine raznih vozila, brodova i aviona, smanjuje se njihova nosivost, a povećava utrošak pogonske energije. Teže konstrukcije zahtijevaju veći utrošak materijala i

radne snage, što sve povećava troškove izrade i eksploatacije konstrukcije. Prema tome, rješenje problema ne leži u povećavanju dimenzija konstrukcije nego u iznalaženju povoljnih oblika i dimenzija, koji uz zadano opterećenje zadovoljavaju uvjet čvrstoće, stabilnosti i krutosti, uz što manji utrošak materijala, a to i jest glavni zadatak nauke o čvrstoći.

Pri analizi naprezanja služimo se vrlo često metodom presjeka. Na mjestu presjeka određujemo rezultantu i rezultirajući moment unutrašnjih sila pomoću uvjeta ravnoteže, a raspodjelu naprezanja po presjeku pomoću pretpostavke o deformiranju i veze između naprezanja i deformacija.

1.3. Proračunska shema konstrukcije

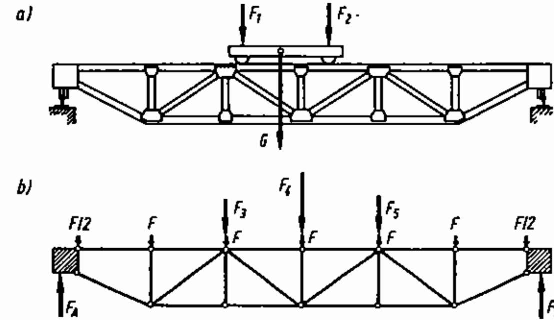
Prije nego što pristupimo analizi naprezanja i deformacija u nekoj konstrukciji, potrebno je prikazati konstrukciju pomoću proračunske sheme na kojoj će biti ucrtane samo glavne dimenzije i opterećenja bez nepotrebnih detalja koji mogu prikrivati problem i otežavati njegovo rješavanje. Istu konstrukciju možemo shematizirati na više načina, ovisno o tome što nas najviše interesira u proračunu i koliku točnost proračuna želimo. Obično se u prvom koraku usvaja najjednostavnija shema, a zatim se u daljnjoj analizi uzima u obzir sve više detalja. Na slici 1.2 prikazana je jedna od niza greda u obliku I-profila. Preko greda je postavljen pod, na kojem su uskladištene vreće. Za jednu gredu vezana je kolotura preko koje se diže težina G. Na slici 1.2b greda je prikazana shematski. Vlastita težina grede i



Slika 1.2. Realna konstrukcija i njena proračunska shema

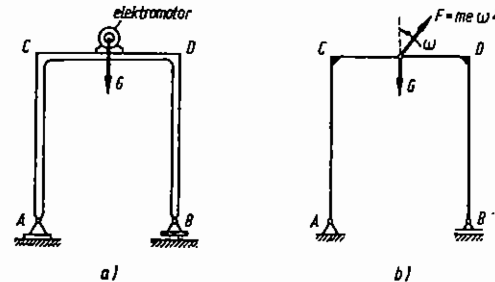
odgovarajućeg dijela poda zamijenjena je opterećenjem q_1, dok je težina vreća zamijenjena opterećenjem q_2'. Sila u užetu i težina G imaju rezultantu F_1, koja se preko osovine koloture prenosi na konstrukciju u točki D. Ta sila iznosi $F_1 = 2G\cos\beta$. Na slici 1.2c prikazana je još jedna moguća shematizacija. Ovdje je $q_2 = q_1 + q_2'$. U prvoj analizi nećemo uzeti u obzir koncentraciju naprezanja koju izazivaju otvor u točki C i nosač koloture. Pri detaljnijoj analizi potrebno je i to uzeti u obzir.

Slika 1.3 prikazuje mosnu dizalicu i njenu proračunsku shemu. Iako su štapovi rešetke mosta kruto vezani u čvorovima, na shemi su prikazane zglobne veze. Time uvodimo određenu grešku, ali zato mnogostruko olakšavamo proračun. Iskustvo pokazuje da greške koje nastaju uvođenjem zglobova u proračunsku shemu nisu velike. Vlastita težina mosta predstavljena je silama F. Težina vitla i tereta predstavljena je silama F_3, F_4 i F_5. Sile F_3, F_4 i F_5 statički su ekvivalentne silama F_1, F_2 i G.

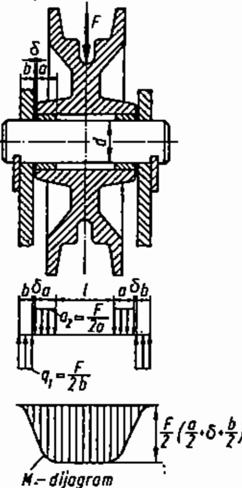


Slika 1.3. Mosna dizalica i njena proračunska shema

Krute veze nije moguće uvijek zamijeniti zglobovima. Na slici 1.4a prikazan je okvirni nosač, na kome se nalazi elektromotor. Krute veze u tačkama C i D ne mogu biti zamijenjene zglobovima jer konstrukcija više ne bi bila kruta figura. (Kad bi postojala dijagonalna veza, npr. CB ili AD, mogli bismo u proračunskoj shemi postaviti zglobove i u točkama C i D.) Opterećenje konstrukcije prikazano je težinom elektromotora G i centrifugalnom silom $F = me\omega^2$, gdje je m masa rotora, e ekscentricitet rotora, a ω kutna brzina. Smjer djelovanja sile F okreće se kutnom brzinom ω. Na slici 1.5 prikazan je lančanik i proračunska shema osovine lančanika s pripadnim momentnim dijagramom.



Slika 1.4. Proračunska shema okvirne konstrukcije

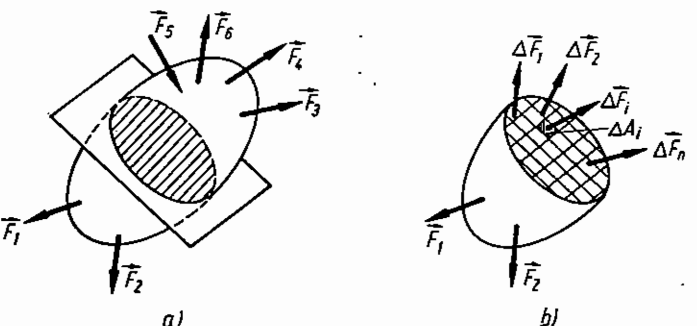


Slika 1.5. Proračunska shema osovine lančanika

2. NAPREZANJE

2.1. Vektor naprezanja, normalno i posmično naprezanje

Vanjske sile koje djeluju na neko tijelo nastoje da razdvoje ili približe pojedine čestice tijela, čemu se suprotstavljaju unutrašnje sile među česticama. Kao rezultat istovremenog djelovanja unutrašnjih i vanjskih sila tijelo mijenja oblik i dimenzije, drugim riječima kažemo da se tijelo deformira. Zamislimo tijelo proizvoljna oblika pod djelovanjem niza sila prema slici 2.1. Presijecimo tijelo (u mislima) na dva dijela. Radi jednostavnosti neka je površina presjeka ravna. Ako je tijelo bilo u ravnoteži pod djelovanjem vanjskih sila, bit će i svaki dio tijela u ravnoteži pod djelovanjem vanjskih i unutrašnjih sila koje djeluju na mjestu presjeka. Podijelimo površinu presjeka na niz elementarnih površina ΔA_i kako je prikazano na slici 2.1b.



Slika 2.1. Dio tijela pod djelovanjem vanjskih i unutrašnjih sila

Na svakoj elementarnoj površini djeluje elementarna unutrašnja sila $\Delta\vec{F}_i$. Te sile mijenjaju se po smjeru i veličini, a i očito ovise o veličini elementarne površine. Omjer sile $\Delta\vec{F}_i$ i površine ΔA_i definiramo kao vektor srednjeg naprezanja, tj.

$$\vec{p}_{sr}=\frac{\Delta\vec{F}_i}{\Delta A_i}. \tag{2.1}$$

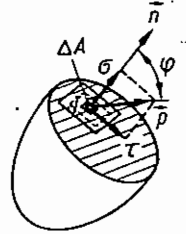
Što je manja površina ΔA_i, bit će manja i sila $\Delta\vec{F}_i$, a srednje naprezanje manje će se razlikovati od pravog naprezanja. Vektor naprezanja u nekoj točki T definiran je izrazom

$$\vec{p} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta\vec{F}}{\Delta A}. \tag{2.2}$$

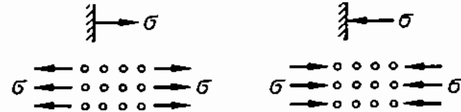
Površina ΔA teži nuli tako da uvijek sadrži točku T, kako je ilustrirano na slici 2.2.

Apsolutnu vrijednost p vektora naprezanja $\vec{p}$ zvat ćemo punim naprezanjem. Sila $\Delta\vec{F}$ i vektor naprezanja $\vec{p}$ nisu u općem slučaju okomiti na presjek, nego s vanjskom normalom $\vec{n}$ čine neki kut φ. Naprezanje $\vec{p}$ možemo rastaviti u normalnu komponentu σ, koja je okomita na presjek i tangencijalnu ili posmičnu komponentu τ, koja leži u ravnini presjeka. Te su komponente prikazane na slici 2.2 i određene izrazima

$$\sigma = p\cos\varphi \qquad \tau = p\sin\varphi. \tag{2.3}$$



Slika 2.2. Vektor naprezanja rastavlja se u normalnu i posmičnu komponentu



Slika 2.3. Vlačna naprezanja izazivaju udaljavanje, a tlačna približavanje čestica tijela

Umjesto normalna komponenta naprezanja često kraće kažemo *normalno naprezanje*, a umjesto tangencijalna komponenta naprezanja: *tangencijalno* ili *posmično naprezanje*. Kut između n i p veći je od nule, a manji od 180°, tako da normalno naprezanje može biti pozitivno ili negativno, dok je tangencijalno naprezanje uvijek pozitivno. To ima i svoj fizikalni smisao. Naime, ako je $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$, normalno naprezanje djeluje kao na slici 2.3a, tj. nastoji da odvoji čestice tijela. U tom slučaju naprezanje je pozitivno ili vlačno. Ako je $90° \leqslant \varphi \leqslant 180°$, normalno naprezanje djeluje kao na slici 2.3b, tj. ono je negativno ili tlačno.

Smjer djelovanja posmičnih naprezanja nema nikakvo fizikalno značenje kod izotropnih materijala. Zbog toga, dok ne uvedemo koordinatni sustav, nećemo definirati predznak posmičnog naprezanja, odnosno uzimat ćemo uvijek da je posmično naprezanje pozitivno. Normalnim naprezanjem tijelo se opire međusobnom primicanju ili razmicanju svojih čestica. Posmičnim naprezanjem tijelo se opire klizanju jednog sloja čestica po drugom.

Raspored i veličina naprezanja ovise o veličini i obliku tijela te o veličini i rasporedu opterećenja. Naprezanja mogu ovisiti i o materijalu od kojeg je izrađeno

tijelo, ali u većini slučajeva naprezanja ne ovise o elastičnim svojstvima tijela. Ako npr. imamo dvije jednake grede koje su oslonjene i opterećene na isti način, u njima će biti jednaka naprezanja iako je jedna greda od čelika, a druga npr. od neke aluminijske legure.

U istoj točki tijela za svaku orijentaciju presjeka dobit ćemo drugu vrijednost komponente naprezanja. Prema tome, besmisleno je postaviti pitanje o veličini naprezanja u nekoj točki, a da se ne definira i orijentacija presjeka za koji se traži naprezanje. Kod štapova, ako presjek nije izričito spomenut, podrazumijeva se poprečni presjek.

Na temelju definicijskih izraza (2.1), (2.2) i (2.3) vidimo da vektor naprezanja $\vec{p}$ kao i njegove komponente σ i τ imaju dimenziju FL^{-2}, tj. dimenziju sile podijeljenu s površinom. Osnovna jedinica jest paskal (Pa) definiran izrazom

$$1\,\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

To je vrlo mala jedinica, pa se za naprezanja koriste najčešće megapaskali (MPa), odnosno kilopaskali (kPa). Elastične konstante obično se izražavaju u gigapaskalima (GPa), gdje je

$$1\,\text{kPa} = 10^3\,\text{Pa} = 10^3\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$1\,\text{MPa} = 10^6\,\text{Pa} = 10^6\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$1\,\text{GPa} = 10^9\,\text{Pa} = 10^9\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Ovisnost naprezanja o orijentaciji poprečnog presjeka ilustrirat ćemo slijedećim primjerom.

PRIMJER 2.1

Štap pravokutnog poprečnog presjeka opterećen je dvjema kolinearnim silama, prema slici 2.4a. Treba naći normalno i posmično naprezanje u točki T u poprečnom presjeku $\alpha-\alpha$ i kosom presjeku $\beta-\beta$.

Zadano: $F = 5\,\text{kN}$, $b = 2\,\text{cm}$, $h = 5\,\text{cm}$, $\varphi = 30°$.

Na slici 2.4b prikazan je lijevi dio štapa odvojen poprečnim presjekom. Ako se pretpostavi da je naprezanje jednako po čitavu presjeku, onda ono mora biti okomito na presjek, tj. paralelno s vanjskom silom F. Uvjet ravnoteže za lijevi dio glasi

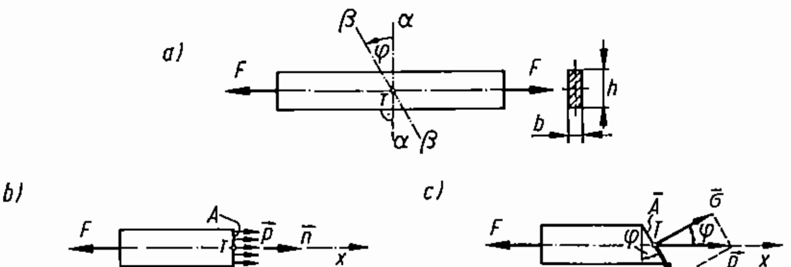
$$\Sigma F_x = -F + pA = 0, \tag{a}$$

gdje je pA rezultanta unutrašnjih sila na presjeku, a A površina poprečnog presjeka. Odavde se može lako dobiti da je

$$p = \frac{F}{A}. \tag{b}$$

Naprezanje $\vec{p}$ čini s okomicom $\vec{n}$ kut $\varphi=0°$, pa je prema (2.3)

$$\sigma=p=\frac{F}{A} \text{ i } \tau=0. \tag{c}$$



Slika 2.4. Komponente naprezanja u kosom i poprečnom presjeku štapa

Slika 2.4c prikazuje lijevi dio štapa odvojen kosim presjekom. Površina kosog presjeka $\bar{A}$ iznosi

$$\bar{A}=A/\cos\varphi, \tag{d}$$

gdje je $A=bh$ površina poprečnog presjeka. Iz uvjeta ravnoteže za dio štapa na slici 2.4c može se dobiti da je

$$\bar{p}=F/\bar{A}=\frac{F}{A}\cos\varphi. \tag{e}$$

Kako je $F/A=\sigma$, to je

$$\bar{p}=\sigma\cos\varphi. \tag{f}$$

Komponente naprezanja u kosom presjeku možemo izračunati pomoću izraza (2.3), i one iznose

$$\bar{\sigma}=\bar{p}\cos\varphi=\sigma\cos^2\varphi$$
$$\bar{\tau}=\bar{p}\sin\varphi=\sigma\cos\varphi\sin\varphi. \tag{g}$$

Kad uvrstimo konkretne podatke u (c), (e) i (g), dobit ćemo komponente naprezanja u poprečnom i kosom presjeku. U poprečnom presjeku $\alpha-\alpha$ komponente naprezanja iznose

$$\sigma=p=\frac{F}{A}=5\cdot10^6\frac{\text{N}}{\text{m}^2}=5\,\text{MN/m}^2=5\,\text{MPa}$$

$$\tau=0.$$

U kosom presjeku $\beta-\beta$ komponente naprezanja jesu

$$\bar{\sigma}=\sigma\cos^2\varphi=5\cdot\cos^2 30°=3{,}75\,\text{MPa}$$

$$\bar{\tau}=\sigma\cos\varphi\sin\varphi=5\cdot\cos30°\cdot\sin30°=2{,}165\,\text{MPa}.$$

Primijetimo na kraju da smo na slici 2.4b naprezanje prikazali nizom strelica, jer naprezanje djeluje po čitavu presjeku, a ne u jednoj točki. Međutim, zbog jednostavnosti i jasnoće slike često se naprezanje prikazuje samo jednom strelicom, kako je prikazano na slici 2.4c, ali se podrazumijeva da djeluje po čitavu presjeku.

Kako se vidi iz ovog primjera, za svaku orijentaciju presjeka kroz točku T dobit ćemo drugu vrijednost vektora naprezanja $\vec{p}$ i druge vrijednosti njegovih komponenata σ i τ. Kako se kroz promatranu točku može postaviti beskonačno mnogo presjeka, ima beskonačno mnogo komponenata naprezanja σ i τ koje su sve komponente istog stanja naprezanja. Nasreću, nije potrebno poznavati sve komponente naprezanja da bi se potpuno odredilo stanje naprezanja. Poslije ćemo pokazati da je dovoljno poznavati komponente naprezanja na tri presjeka, pa da stanje naprezanja bude potpuno određeno.

2.2. Tenzor naprezanja, matrica tenzora naprezanja

Do sada smo se u mehanici susretali s veličinama za čije je opisivanje bio dovoljan jedan podatak, npr. masa, temperatura itd. Te se veličine nazivaju *skalari*. Druga vrst veličina bili su *vektori* ili usmjerene veličine, npr. pomak, sila, brzina, moment itd. Da bismo jednoznačno odredili vektor, potrebna su tri podatka: tri komponente ili npr. apsolutna vrijednost i dva kuta koji određuju smjer (u ravnini je dovoljno zadati samo dva podatka). U nauci o čvrstoći susrest ćemo se s veličinama koje nazivamo *tenzori* 2. reda i za čije je definiranje potrebno $3^2=9$ podataka (u ravnini četiri). Takve su veličine npr. naprezanje, deformacija, moment tromosti mase i površine. Skalari se još nazivaju tenzori nultog reda jer je za njihovo definiranje potrebno $3^0=1$ podatak, a vektori tenzori prvog reda jer je za njihovo definiranje potrebno $3^1=3$ podatka. Tipovi tenzora opisani su u tablici 2.1.

Da bi neka veličina bila tenzor nekog reda nije dovoljno da ima odgovarajući broj komponenata, nego se te komponente moraju mijenjati po točno određenom

Tablica 2.1

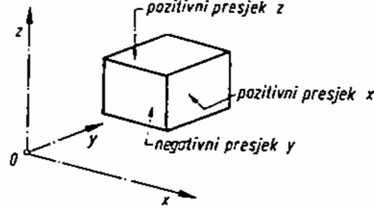
Tipovi tenzora

Red tenzora	Poseban naziv	Potreban broj podataka		Primjer
		u ravnini	u prostoru	
nulti	skalar	$2^0=1$	$3^0=1$	masa
prvi	vektor	$2^1=2$	$3^1=3$	sila
drugi	tenzor	$2^2=4$	$3^2=9$	naprezanje
četvrti	–	$2^4=16$	$3^4=81$	tenzor elastičnosti

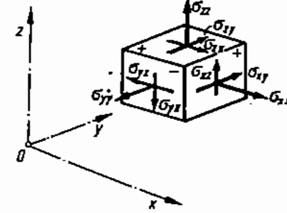
zakonu pri rotaciji koordinatnog sustava. Zakon po kome se mijenjaju komponente tenzora zove se zakon transformacije tenzora. Izraze za transformaciju tenzora naprezanja izvest ćemo u drugom dijelu ovog poglavlja.

Vidjeli smo da u jednoj točki tijela možemo odrediti beskonačno mnogo vektora naprezanja $\vec{p}$ ovisno o orijentaciji presjeka; međutim, dovoljno je poznavati vektor $\vec{p}$ za tri presjeka da bismo odredili naprezanje u bilo kojem proizvoljnom presjeku. Za definiranje tenzora naprezanja obično se uzimaju tri međusobno okomita presjeka postavljena okomito na odgovarajuće koordinatne osi. Vektor $\vec{p}$ na svakom od tri presjeka rastavljamo u tri komponente, dakle dovoljno je poznavati devet komponenata naprezanja da bi naprezanje u nekoj točki bilo potpuno definirano.

Uvođenjem koordinatnog sustava olakšava se rad s komponentama naprezanja kao i njihovo označivanje. Zbog toga treba označiti pojedine presjeke i komponente naprezanja koje djeluju na njima u skladu s odabranim koordinatnim sustavom. Presjeci su označeni na slici 2.5. Presjek ima oznaku one koordinatne osi na koju je okomit. Ako je vanjska normala na presjek usmjerena u pozitivnom smjeru koordinatne osi, presjek je pozitivan, a ako je vanjska normala usmjerena suprotno



Slika 2.5. Definicija predznaka presjeka



Slika 2.6. Komponente tenzora naprezanja u pravokutnom koordinatnom sustavu

od smjera koordinatne osi, presjek je negativan. Komponente naprezanja označuju se simbolom σ s dva indeksa, prema slici 2.6. Prvi indeks označuje presjek na kojemu djeluje komponenta, a drugi koordinatnu os s kojom je komponenta paralelna. Tako je npr. σ_{xy} komponenta naprezanja koja djeluje na presjeku x paralelno s osi y, a σ_{zz} je komponenta koja djeluje na presjeku z paralelno s osi z. Posmične komponente imaju različite indekse, a normalne komponente imaju oba indeksa jednaka. Zbog toga nije neophodno uvoditi posebne oznake za normalne i posmične komponente. Ipak, u tehničkoj literaturi prevladava označivanje normalne komponente znakom σ s jednim indeksom, a posmične komponente znakom τ s dva indeksa.

Ako se želi označiti bilo koja komponenta naprezanja, a ne neka posebna, pišu se indeksi ij. Tako npr.

$$\sigma_{ij} \qquad \begin{matrix} i=x, y \text{ ili } z \\ j=x, y \text{ ili } z \end{matrix} \tag{2.4}$$

označuje bilo koju od devet komponenata naprezanja. Isti se znak upotrebljava da bi se označio skup svih devet komponenata naprezanja. Devet komponenata naprezanja mogu se složiti u kvadratnu matricu koja se skraćeno označuje $[\sigma_{ij}]$, tj.

$$[\sigma_{ij}]=\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{x} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{y} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{z} \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Desna je matrica uobičajena u tehničkoj literaturi. Prvi stupac u matrici čine komponente koje su paralelne s osi x. Drugi stupac čine komponente paralelne s osi y, a treći stupac komponente paralelne s osi z. U prvom su retku komponente koje djeluju na presjeku x. U drugom i trećem retku su komponente koje djeluju u presjeku y, odnosno u presjeku z.

Predznak komponente naprezanja određen je ovim pravilima:

a) komponenta naprezanja je pozitivna ako na pozitivnom presjeku djeluje u pozitivnom smjeru ili ako na negativnom presjeku djeluje u negativnom smjeru,

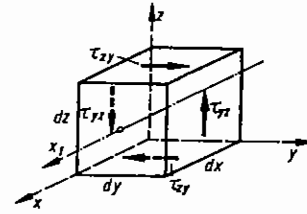
b) komponenta naprezanja je negativna ako na negativnom presjeku djeluje u pozitivnom smjeru ili ako na pozitivnom presjeku djeluje u negativnom smjeru.

Sve komponente naprezanja prikazane na slici 2.6 su pozitivne.

2.3. Simetričnost matrice tenzora naprezanja

Pokazat ćemo da su posmična naprezanja koja djeluju na međusobno okomitim presjecima jednaka. U tu svrhu promotrimo ravnotežu elementa na slici 2.7. Os x_1 paralelna je s osi x, a prolazi kroz središte elementa. Na slici su ucrtana samo ona naprezanja koja čine moment oko osi x_1. Naprezanja σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy} i τ_{xz} prolaze kroz os x_1 pa nemaju momenta oko te osi. Naprezanja τ_{yx} i τ_{zx} paralelna su s osi x_1, pa također ne čine moment oko te osi. Preostaju samo naprezanja τ_{yz} i τ_{zy}, koja su ucrtana na slici 2.7. Ravnoteža momenata oko osi x_1 glasi

$$\Sigma M_{x1} = -(\tau_{zy}\,dx\,dy)\,dz + (\tau_{yz}\,dx\,dz)\,dy = 0.$$



Slika 2.7. Posmična su naprezanja na međusobno okomitim presjecima jednaka

Pokratimo li gornji izraz s $dx\,dy\,dz$, dobit ćemo

$$\tau_{zy}=\tau_{yz}. \tag{2.6}$$

Na sličan način, tj. promatranjem ravnoteže momenata oko osi y_1 i z_1, možemo dobiti ostala dva izraza koja glase:

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}$$
$$\tau_{zx}=\tau_{xz}. \tag{2.7}$$

Osi y_1 i z_1 prolaze kroz središte elementa, a paralelne su s osima y i z. Element na slici 2.7 predstavlja homogeno stanje naprezanja; međutim, potpuno iste izraze dobili bismo i u slučaju nehomogenog stanja naprezanja. Postupak izvođenja u tom slučaju bio bi nešto duži. Prema tome, možemo zaključiti da su na dva međusobno okomita presjeka posmična naprezanja jednaka po predznaku i iznosu. Istovremeno su oba usmjerena k zajedničkom bridu elementa ili od brida.

Izraze (2.6) i (2.7) možemo skraćeno napisati u obliku

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ji} \tag{2.8}$$

Taj nam izraz pokazuje da je matrica tenzora naprezanja simetrična s obzirom na glavnu dijagonalu.

2.4. Linearno, ravninsko i prostorno stanje naprezanja

Vidjeli smo da se vektor naprezanja $\vec{p}$ mijenja po smjeru i po veličini kad se mijenja orijentacija presjeka na kojem djeluje. Ako vektor naprezanja $\vec{p}$ leži na jednom pravcu, bez obzira na orijentaciju presjeka, stanje je naprezanja linearno ili jednoosno. Ako pri proizvoljnoj promjeni presjeka vektor naprezanja stalno leži u istoj ravnini, stanje je naprezanja ravninsko ili dvoosno. Neka ravnina Oxy bude paralelna s ravninom u kojoj leži vektor naprezanja. Ravninsko stanje naprezanja tada je definirano izrazima

$$\sigma_x=\sigma_x(x,y),\ \ \sigma_y=\sigma_y(x,y),\ \ \tau_{xy}=\tau_{xy}(x,y)$$
$$\sigma_z=0,\ \ \tau_{xz}=\tau_{yz}=0. \tag{2.9}$$

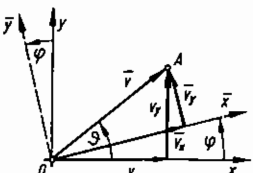
Ako vektor naprezanja mijenja orijentaciju u prostoru, stanje je naprezanja prostorno ili troosno.

2.5. Transformacija komponenata vektora

Vidjeli smo da komponente tenzora naprezanja ovise o orijentaciji presjeka. Ako se za presjek veže koordinatni sustav, komponente naprezanja, očito, ovise o orijentaciji koordinatnog sustava. Obično su komponente tenzora naprezanja zadane za jedan koordinatni sustav koji zovemo stari koordinatni sustav i označavamo s

$Oxyz$. Koordinatni sustav $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ koji nastaje rotacijom starog koordinatnog sustava oko ishodišta O zvat ćemo novi ili transformirani koordinatni sustav. Komponente u novom koordinatnom sustavu zvat ćemo transformirane komponente. Izrazi kojima se te komponente određuju iz zadanih komponenata jesu izrazi za transformaciju.

Zbog jednostavnosti i postupnosti izvest ćemo prvo izraze za transformaciju vektora ili tenzora prvog reda, a zatim ćemo prijeći na transformaciju tenzora 2. reda. U oba slučaja zadržat ćemo se na dvoosnom problemu.



Slika 2.8. Transformacija vektora

Na slici 2.8 prikazan je vektor $\vec{v}$ koji u osnovnom koordinatnom sustavu Oxy ima komponente v_x i v_y, a u zarotiranom sustavu $O\bar{x}\bar{y}$ komponente $\bar{v}_x$ i $\bar{v}_y$. Apsolutnu vrijednost vektora, tj. udaljenost $\overline{OA}$, označit ćemo sa v. Komponente v_x i v_y iznose:

$$v_x=v\cos\vartheta$$
$$v_y=v\sin\vartheta. \tag{2.10}$$

Kako vektor $\vec{v}$ čini s osi $\bar{x}$ kut $(\vartheta-\varphi)$, bit će

$$\bar{v}_x=v\cos(\vartheta-\varphi)$$
$$\bar{v}_y=v\sin(\vartheta-\varphi)$$

odnosno

$$\bar{v}_x=v\cos\vartheta\cos\varphi+v\sin\vartheta\sin\varphi$$
$$\bar{v}_y=v\sin\vartheta\cos\varphi-v\cos\vartheta\sin\varphi.$$

Uzmemo li u obzir izraz (2.10), gornji izraz prelazi u

$$\bar{v}_x=v_x\cos\varphi+v_y\sin\varphi$$
$$\bar{v}_y=-v_x\sin\varphi+v_y\cos\varphi. \tag{2.11}$$

Izraz (2.11) često služi kao definicija vektora koja glasi: Usmjerena veličina kojoj su transformirane komponente $\bar{v}_x$ i $\bar{v}_y$ povezane sa starim komponentama v_x i v_y pomoću izraza (2.11) jest vektor. Znamo da se svaka usmjerena veličina ne ponaša kao vektor: npr. kut zakreta jest usmjerena veličina, ali nije vektor. Vektor

$\vec{v}$ može predstavljati bilo koju vektorsku veličinu, npr. silu, brzinu, vektor položaja itd. Shvatimo li vektor $\vec{r}$ kao vektor položaja $\vec{r}=\vec{v}$, njegove komponente bit će jednake koordinatama točke A, tj.

$$\vec{v}=\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}.$$

Prema tome vidimo da se koordinate x, y transformiraju prema izrazu (2.11), tj.

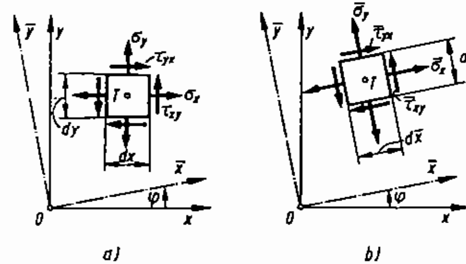
$$\begin{aligned}\bar{x}&=x\cos\varphi+y\sin\varphi\\ \bar{y}&=-x\sin\varphi+y\cos\varphi.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Izraz (2.12) izriče ovisnost novih koordinata o starima. Inverzijom možemo dobiti obratnu ovisnost, tj.

$$\begin{aligned}x&=\bar{x}\cos\varphi-\bar{y}\sin\varphi\\ y&=\bar{x}\sin\varphi+\bar{y}\cos\varphi.\end{aligned}\tag{2.13}$$

2.6. Izrazi za transformaciju komponenata tenzora naprezanja

Slika 2.9 prikazuje stari ili osnovni koordinatni sustav Oxy te novi transformirani sustav $O\bar{x}\bar{y}$ i dva elementa s ucrtanim naprezanjima. Jedan element odnosi se na koordinatni sustav Oxy i na njemu djeluju naprezanja σ_x, σ_y, τ_{xy} i τ_{yx}. Drugi element odnosi se na koordinatni sustav $O\bar{x}\bar{y}$ i na njemu djeluju $\bar{\sigma}_x$ (čitamo



Slika 2.9. Transformacija tenzora naprezanja

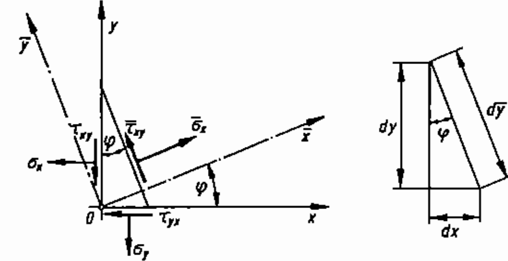
sigma iks potez), $\bar{\sigma}_y$ i $\bar{\tau}_{xy}$. Ubuduće ćemo sve veličine (naprezanja, deformacije, momente tromosti itd.) koje se odnose na sustav Oxy označivati bez poteza, a one veličine koje se odnose na zarotirani sustav $O\bar{x}\bar{y}$ s potezom. Na slici nisu upisani prirasti naprezanja $(\partial\sigma_x/\partial x)\mathrm{d}x$, $(\partial\sigma_y/\partial y)\mathrm{d}y$ i $(\partial\tau_{xy}/\partial x)\mathrm{d}x$ jer bi se oni pri izvođenju izraza za transformaciju poništili kao male veličine višeg reda.

Slika 2.10 prikazuje trokutni element čije su stranice $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ i $\mathrm{d}\bar{y}$. Trokutni je element pravokutan, pa je

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\bar{y}}=\sin\varphi \quad \text{i} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\bar{y}}=\cos\varphi,\tag{2.14}$$

gdje su $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ i $\mathrm{d}\bar{y}$ apsolutne vrijednosti stranica trokuta. Uvjeti ravnoteže elementa za osi $\bar{x}$ i $\bar{y}$ glase

$$\begin{aligned}\Sigma\bar{F}_x&=\bar{\sigma}_x\mathrm{d}\bar{y}-\tau_{xy}\mathrm{d}y\sin\varphi-\sigma_x\mathrm{d}y\cos\varphi-\tau_{yx}\mathrm{d}x\cos\varphi-\sigma_y\mathrm{d}x\sin\varphi=0\\ \Sigma\bar{F}_y&=\bar{\tau}_{xy}\mathrm{d}\bar{y}-\tau_{xy}\mathrm{d}y\cos\varphi+\sigma_x\mathrm{d}y\sin\varphi+\tau_{yx}\mathrm{d}x\sin\varphi-\sigma_y\mathrm{d}x\cos\varphi=0.\end{aligned}\tag{2.15}$$

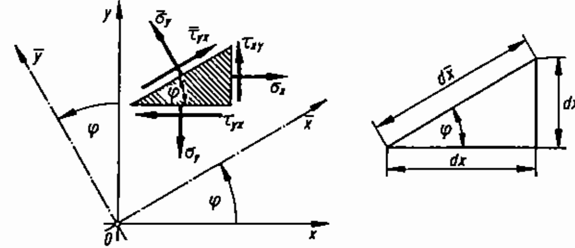

Slika 2.10. Ravnoteža trokutnog elementa

Te izraze treba podijeliti s $\mathrm{d}\bar{y}$, u njih uvrstiti (2.14) i srediti, uzimajući u obzir da je $\tau_{xy}=\tau_{yx}$, pa će se dobiti

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_x&=\sigma_x\cos^2\varphi+\sigma_y\sin^2\varphi+2\tau_{xy}\sin\varphi\cos\varphi\\ \bar{\tau}_{xy}&=-(\sigma_x-\sigma_y)\cos\varphi\sin\varphi+2\tau_{xy}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi).\end{aligned}\tag{2.16}$$

To su izrazi za transformaciju dviju komponenata naprezanja. Izrazi za preostale dvije komponente mogu se dobiti na sličan način razmatranjem ravnoteže trokutnog elementa na slici 2.11. Ti izrazi glase:

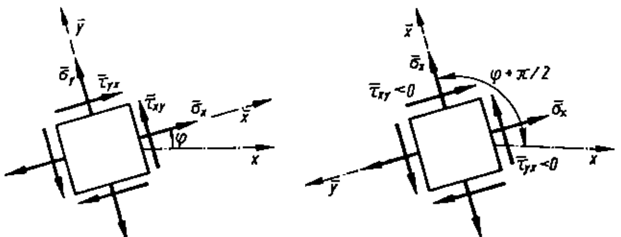
$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_y&=\sigma_x\sin^2\varphi+\sigma_y\cos^2\varphi-2\tau_{xy}\cos\varphi\sin\varphi\\ \bar{\tau}_{yx}&=-(\sigma_x-\sigma_y)\cos\varphi\sin\varphi+\tau_{xy}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi).\end{aligned}\tag{2.17}$$


Slika 2.11. Komponente naprezanja na trokutnom elementu

Izraze (2.17) možemo dobiti iz izraza (2.16) ako uzmemo u obzir da je, prema slici 2.12,

$$\overline{\sigma}_x\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=\overline{\sigma}_y(\varphi)$$

$$\overline{\tau}_{xy}\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=-\overline{\tau}_{yx}(\varphi). \tag{2.18}$$



Slika 2.12. Pri rotaciji koordinatnog sustava za $\pi/2$ $\overline{\sigma}_x$ prelazi u $\overline{\sigma}_y$, a $\overline{\tau}_{xy}$ u $-\overline{\tau}_{yx}$

Pomoću trigonomet. relacija $2\cos\varphi\sin\varphi=\sin 2\varphi$, $\cos^2\varphi-\sin^2\varphi=\cos 2\varphi$, $\sin^2\varphi=(1-\cos 2\varphi)/2$ i $\cos^2\varphi=(1+\cos 2\varphi)/2$ možemo izraze (2.16) i (2.17) preinačiti u izraze

$$\overline{\sigma}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\varphi+\tau_{xy}\sin 2\varphi$$

$$\overline{\sigma}_y=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\varphi-\tau_{xy}\sin 2\varphi \tag{2.19}$$

$$\overline{\tau}_{xy}=\overline{\tau}_{yx}=-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\varphi+\tau_{xy}\cos 2\varphi.$$

Lako se možemo uvjeriti da među komponentama naprezanja vrijede ovi odnosi:

$$I_{1\sigma}=\overline{\sigma}_x+\overline{\sigma}_y=\sigma_x+\sigma_y=\text{konst.}$$

$$I_{2\sigma}=\overline{\sigma}_x\cdot\overline{\sigma}_y-\overline{\tau}_{xy}^2=\sigma_x\cdot\sigma_y-\tau_{xy}^2=\text{konst.} \tag{2.20}$$

Veličine $I_{1\sigma}$ i $I_{2\sigma}$ nazivaju se prva odnosno druga invarijanta tenzora naprezanja jer se ne mijenjaju pri rotaciji koordinatnog sustava.

2.7. Glavna naprezanja

Vrlo često se susrećemo s problemom određivanja maksimalnog normalnog naprezanja u nekoj točki, kao i presjeka na kome ono djeluje. U tu svrhu derivirat ćemo u (2.19) izraz za $\overline{\sigma}_x$ po φ i derivaciju izjednačiti s nulom:

$$\frac{d\overline{\sigma}_x}{d\varphi}=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}(-2\sin 2\varphi)+2\tau_{xy}\cos 2\varphi=0.$$

Nakon sređivanja i usporedbe s trećim izrazom (2.19) dobit ćemo

$$\frac{d\overline{\sigma}_x}{d\varphi}=2\left(-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\varphi+\tau_{xy}\cos 2\varphi\right)=2\overline{\tau}_{xy}=0 \tag{2.21}$$

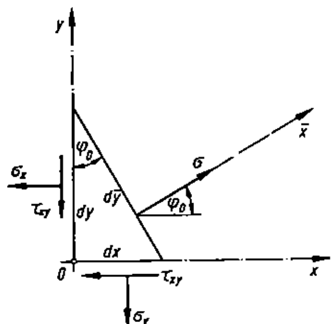
Vidimo da će na presjecima na kojima djeluju ekstremna normalna naprezanja posmična naprezanja biti jednaka nuli. Označimo s φ_0 kut koji ekstremna normalna naprezanja čine s osi x. Ako u (2.21) uvrstimo φ_0 umjesto φ i sredimo, dobit ćemo

$$\mathrm{tg}\,2\varphi_0=\frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x-\sigma_y)/2}. \tag{2.22}$$

Očito je da kut $2\varphi_0$ ima dvije različite vrijednosti $2\varphi_0'$ i $2\varphi_0''$ koje se međusobno razlikuju za π. Kutovi φ_0' i φ_0'' međusobno se razlikuju za $\pi/2$. Jedna vrijednost kuta daje položaj maksimalnog naprezanja σ_{max}, a druga minimalnog naprezanja σ_{min}. Ekstremne vrijednosti normalnih naprezanja nazivaju se *glavna naprezanja*, a odgovarajući presjeci odnosno osi glavni presjeci i glavne osi naprezanja. Uobičajeno je da se glavna naprezanja označavaju sa

$$\sigma_1=\sigma_{max},\quad \sigma_2=\sigma_{min}.$$

Da bismo odredili glavna naprezanja σ_1 i σ_2, trebalo bi iz izraza (2.22) odrediti $\sin 2\varphi_0'$ i $\cos 2\varphi_0'$, te $\sin 2\varphi_0''$ i $\cos 2\varphi_0''$, pa te parove vrijednosti uvrstiti u izraz (2.19) i zatim srediti. Mi ćemo postupiti na drugi način. Naime, ako na slici 2.10 odaberemo kut φ jednak kutu glavnih naprezanja φ_0, dobit ćemo element prema slici 2.13.



Slika 2.13. Trokutni element na kojem djeluje glavno naprezanje

Ravnoteža tog elementa za osi x i y glasi

$$\Sigma F_x=-\sigma_x dy-\tau_{xy}dx+\sigma d\overline{y}\cos\varphi_0=0$$

$$\Sigma F_y=-\sigma_y dx-\tau_{xy}dy+\sigma d\overline{y}\sin\varphi_0=0.$$

Ako podijelimo gornje izraze s $d\bar{y}$ i uzmemo u obzir da je $dy/d\bar{y}=\cos\varphi_0$, $dx/d\bar{y}=\sin\varphi_0$, dobit ćemo

$$(\sigma_x-\sigma)\cos\varphi_0+\tau_{xy}\sin\varphi_0=0$$
$$\tau_{xy}\cos\varphi_0+(\sigma_y-\sigma)\sin\varphi_0=0. \qquad (2.23)$$

To je sustav od dvije homogene linearne jednadžbe s tri nepoznanice: $\cos\varphi_0$, $\sin\varphi_0$ i σ. Taj će sustav jednadžbi imati netrivijalno rješenje samo ako determinanta sustava bude jednaka nuli, tj. ako je

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x-\sigma) & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y-\sigma) \end{vmatrix}=0. \qquad (2.24)$$

Razvijanjem te determinante dobit ćemo kvadratnu jednadžbu

$$\sigma^2-\sigma(\sigma_x+\sigma_y)+(\sigma_x\sigma_y-\tau_{xy}^2)=0. \qquad (2.25)$$

Rješenje te jednadžbe glasi

$$\sigma_{1,2}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2-(\sigma_x\sigma_y-\tau_{xy}^2)}$$

odnosno

$$\sigma_{1,2}=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}. \qquad (2.26)$$

Pomoću izraza (2.26) možemo u svakoj točki odrediti glavna naprezanja σ_1 i σ_2.

2.8. Mohrova kružnica naprezanja

U ovom ćemo poglavlju pokazati kako se izrazi za transformaciju naprezanja (2.21) mogu interpretirati grafički. Prvi prijedlog za grafički postupak dao je K. Culmann 1866. god. Taj je postupak usavršio i objavio 1895. god. Otto Mohr.

Prva i treća jednadžba izraza (2.19) mogu se napisati u obliku

$$\bar{\sigma}_x-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\varphi+\tau_{xy}\sin 2\varphi$$

$$\bar{\tau}_{xy}=-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\varphi+\tau_{xy}\cos 2\varphi.$$

Ako oba ta izraza kvadriramo, a zatim zbrojimo, dobit ćemo

$$\left(\bar{\sigma}_x-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2+(\bar{\tau}_{xy})^2=\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2. \qquad (2.27)$$

Usporedimo li ovaj izraz s jednadžbom kružnice

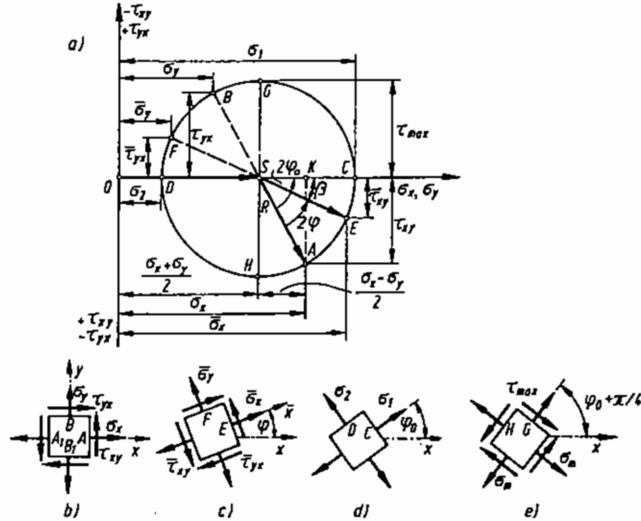
$$(x-p)^2+(y-q)^2=R^2, \qquad (b)$$

vidjet ćemo da on predstavlja jednadžbu kružnice u koordinatnom sustavu $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\tau}_{xy}$, gdje su

$$p=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}=\sigma_m \text{ i } q=0 \quad \text{koordinate središta } S\text{, a}$$
$$R=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} \quad \text{polumjer kružnice.} \qquad (2.28)$$

Središte kružnice nalazi se na osi σ. Udaljenost središta S kružnice naprezanja od ishodišta je $(\sigma_x+\sigma_y)/2$, a polumjer kružnice je R.

Mohrova kružnica naprezanja prikazana je na slici 2.14. Svaka točka Mohrove kružnice određena je s dvije koordinate: $\bar{\sigma}_x$ i $\bar{\tau}_{xy}$, tj. dvije komponente naprezanja koje djeluju na nekom presjeku. Ako okrenemo presjek za kut φ, točka na Mohrovoj kružnici opisat će luk veličine 2φ. Prema tome, ako presjek napravi jedan puni okret, točka se okrene dva puta po kružnici. Zaključujemo da svakom položaju točke na Mohrovoj kružnici odgovaraju dva presjeka koja se međusobno razlikuju za 180°, npr. presjeci A i A_1 na slici 2.14b ili presjeci B i B_1 na istoj slici. To se moglo i očekivati jer na tim presjecima djeluju jednaka naprezanja.



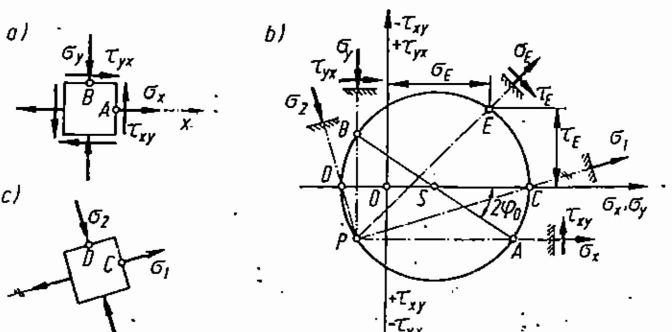
Slika 2.14. Mohrova kružnica naprezanja

Na slici 2.14b prikazano je stanje naprezanja u kojem su sve komponente pozitivne. Presjeci A i B čine međusobno kut od 90°, pa će odgovarajuće točke A i B na Mohrovoj kružnici biti razmaknute za središnji kut od 180°, tj. nalaze se dijametralno jedna nasuprot drugoj. Ako je točka A iznad osi apscisa, točka B će bit ispod osi apscisa, i obratno. Iako su oba naprezanja: τ_{xy} i τ_{yx}, istog predznaka po općoj definiciji, njihov predznak pri crtanju Mohrove kružnice mora biti definiran

na drugi način. Da bi okretanje točke na Mohrovoj kružnici imalo isti smjer kao okretanje presjeka, pozitivni τ_{xy} nanosi se ispod osi apscisa, a pozitivni τ_{yx} iznad osi apscisa. U to se možemo lako uvjeriti uvrštavajući konkretne podatke u izraze za transformaciju. Dogovor o predznaku posmičnih naprezanja možemo izraziti i ovako: Pri crtanju Mohrove kružnice iznad osi apscisa nanose se posmična naprezanja koja „okreću" vanjsku normalu u smjeru kazaljke na satu, a ispod osi apscisa ona koja je „okreću" suprotno od smjera kazaljke na satu.

Da bismo mogli riješiti problem dvoosnog napregnutog stanja, odnosno konstruirati Mohrovu kružnicu, potrebno je poznavati 4 podatka. Najčešće su to normalno i posmično naprezanje na dva međusobno okomita presjeka. Međutim, mogu biti zadani normalno i posmično naprezanje za dva presjeka koja čine proizvoljan kut, pri čemu kut ne mora biti poznat. Ako je kut između dva presjeka poznat, dovoljno je zadati samo tri komponente naprezanja. Opisat ćemo postupak konstruiranja i analize Mohrove kružnice kad su poznate obje komponente naprezanja za dva presjeka:

1. Nacrtamo element, odnosno zadane presjeke sa svim komponentama naprezanja. Oba presjeka označimo velikim slovima, npr. A i B, kako je prikazano na slici 2.15a.
2. U koordinatnom sustavu σ, τ ucrtamo točke A i B vodeći računa o tome da je točka iznad osi apscisa ako posmično naprezanje na istoimenom presjeku „okreće" u smjeru kazaljke na satu, odnosno ispod osi apscisa ako posmično naprezanje „okreće" suprotno od smjera kazaljke na satu (slika 2.15b).



Slika 2.15. Određivanje smjera glavnih naprezanja pomoću pola P Mohrove kružnice

3. Konstruiramo kružnicu koja prolazi kroz točke A i B sa središtem na osi σ. Središte S Mohrove kružnice nalazi se u sjecištu osi σ i simetrale dužine AB. Ako su presjeci A i B međusobno okomiti, točke A i B su postavljene dijametralno, tj. središte S nalazi se u sjecištu dužine AB i osi σ (slika 2.15b).
4. Sjecišta C i D Mohrove kružnice i osi σ jesu glavna naprezanja σ_1 i σ_2.
5. Da bismo mogli odrediti pravce glavnih naprezanja, konstruiramo pol P. Kroz točke A i B na Mohrovoj kružnici povlačimo paralele s normalama na presjecima A i B. Te paralele sijeku se u točki P koja se nalazi na Mohrovoj kružnici. Pravci PC i PD određuju smjer glavnih naprezanja. Orijentirani element s glavnim naprezanjima prikazan je na slici 2.15c.
6. Želimo li odrediti komponente naprezanja na proizvoljnom presjeku, npr. presjeku E, povlačimo kroz P paralelu s normalom u E. Ta paralela siječe kružnicu u točki E čije koordinate (σ_E i τ_E) određuju komponente naprezanja na presjeku E.

Neovisno o prethodnim izvodima možemo neposredno iz Mohrove kružnice naprezanja izvući ove zaključke:

1. Postoje dvije točke: C i D, u kojima Mohrova kružnica siječe os σ, tj. točke u kojima su posmična naprezanja jednaka nuli. Normalna naprezanja u tim točkama imaju ekstremne vrijednosti $\sigma_1 = \sigma_{max}$ i $\sigma_2 = \sigma_{min}$.
2. Veličina glavnih naprezanja iznosi

$$\sigma_{1,2} = \sigma_m \pm R = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \pm \tau_{xy}^2}.$$

što odgovara izrazu (2.26).

3. Kut glavnih pravaca naprezanja, prema slici 2.14a, iznosi

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{\overline{AK}}{\overline{SK}} = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2},$$

kako je već navedeno u izrazu (2.27).

4. Točke G i H (slika 2.14a) definiraju presjeke s ekstremnim posmičnim naprezanjima. Iz slike vidimo da su točke G i H na Mohrovoj kružnici udaljene za središnji kut $2\varphi = \pi/2$ od točaka C i D, pa zaključujemo da presjeci u kojima se javljaju ekstremna posmična naprezanja čine kut $\varphi = \pi/4$ s glavnim presjecima. Kako predznak posmičnih naprezanja nema fizikalnog značenja (za izotropne materijale), obje ćemo ekstremne vrijednosti označiti s τ_{max}. Prema slici vidimo da je

$$\tau_{max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2},$$

što odgovara izrazu (2.28).

U presjecima u kojima djeluju maksimalna posmična naprezanja oba normalna su naprezanja jednaka i iznose $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$. Element s maksimalnim posmičnim naprezanjem prikazan je na slici 2.14c.

5. Zbroj normalnih naprezanja za dva međusobno okomita presjeka jest invarijanta, tj.

$$\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y = \sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2 = \text{konst.},$$

što odgovara izrazu (2.20).

6. Prema slici 2.14a vrijedi

$$\bar{\sigma}_x = \sigma_m + R\cos\alpha = \sigma_m + R\cos(2\varphi_0 - 2\varphi)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = R\sin\alpha = R\sin(2\varphi_0 - 2\varphi).$$

Odavde je

$$\overline{\sigma}_x = \sigma_m + R\cos 2\varphi_0 \cos 2\varphi + R\sin 2\varphi_0 \sin 2\varphi$$

$$\overline{\tau}_{xy} = R\sin 2\varphi_0 \cos 2\varphi - R\cos 2\varphi_0 \sin 2\varphi.$$

Kako je $R\sin 2\varphi_0 = \tau_{xy}$, $R\cos 2\varphi_0 = (\sigma_x - \sigma_y)/2$ i $\sigma_m = (\sigma_x + \sigma_y)/2$, gornji izrazi prelaze u (2.19).

7. Ako je zadan element s dva međusobno okomita presjeka, pravac naprezanja σ_1 čini kut manji od $\pi/4$ s pravcem (algebarski) većeg normalnog naprezanja. U to se možemo lako uvjeriti ako uočimo da se točka s algebarskim većim normalnim naprezanjem nalazi na desnoj polovici kružnice (točka A na slici 2.14a). Prema tome, dužina $\overline{SA}$ čini s dužinom $\overline{SC}$ kut koji je manji od $\pi/2$, pa će i presjek A s presjekom C činiti kut manji od $\pi/4$.

PRIMJER 2.2

Zadano je stanje naprezanja $\sigma_x = \sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 50$ MPa. Naći veličinu i pravce glavnih naprezanja analitički i grafički pomoću Mohrove kružnice. Prikazati u polarnom dijagramu funkcije $\overline{\sigma}_x = f_1(\varphi)$ i $\overline{\tau}_{xy} = f_2(\varphi)$.

Analitičko rješenje. Zadano naprezanje predstavlja čisto smicanje. Veličinu glavnih naprezanja odredit ćemo pomoću izraza (2.26):

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \pm\tau_{xy} = \pm 50\,\text{MPa}.$$

Glavna naprezanja jednaka su po apsolutnoj vrijednosti zadanom posmičnom naprezanju. Jedno glavno naprezanje je vlačno, tj. pozitivno, a drugo tlačno, tj. negativno. Zbroj glavnih naprezanja jednak je nuli, kao što zahtijeva izraz (2.20):

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2 = 0.$$

Pravce glavnih naprezanja odredit ćemo pomoću izraza (2.22):

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2}.$$

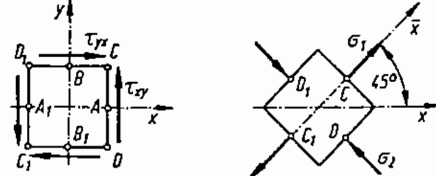
Odavde je $2\varphi_0 = \pm 90°$, odnosno $\varphi_0' = +45°$, $\varphi_0'' = -45°$. Potrebno je još odrediti koje glavno naprezanje djeluje u presjeku $+45°$, a koje u presjeku $-45°$. Da bismo to odredili, uvrstit ćemo vrijednost φ_0' u izraz (2.19) koji glasi

$$\overline{\sigma}_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\varphi_0 + \tau_{xy}\sin 2\varphi_0$$

$$\overline{\sigma}_x = \tau_{xy}\sin 90° = \tau_{xy} = \sigma_1.$$

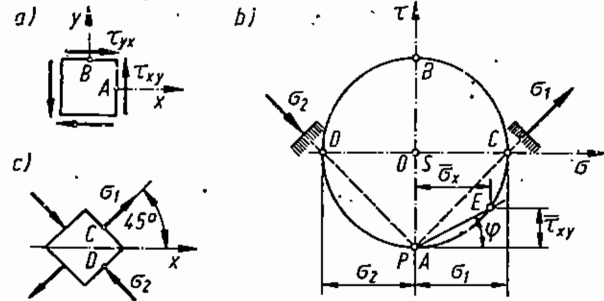
Prema tome, glavno naprezanje σ_1 čini kut od 45° s osi x, a naprezanje σ_2 kut od $-45°$. Osnovni i orijentirani elementi prikazani su na slici 2.16.

S tim slučajem naprezanja susretat ćemo se vrlo često, a posebno kod uvijanja okruglih štapova, pa je potrebno da ga dobro proučimo i zapamtimo. Rezultanta naprezanja koja djeluju na presjecima A i B te A_1 i B_1 izaziva rastezanje dijagonale CC_1; isto tako rezultanta naprezanja u presjecima A i B_1 te B i A_1 izaziva sabijanje dijagonale DD_1. Da je smicanje na osnovnom elementu imalo negativan predznak, glavno naprezanje σ_1 djelovalo bi u presjeku $-45°$, a σ_2 u presjeku $+45°$. Djeluju li na element vlačno i tlačno naprezanje u dva okomita presjeka jednakim intenzitetom, ta su naprezanja ekvivalentna čistom smicanju istim intenzitetom u presjecima zakrenutim za 45° prema osnovnim presjecima.



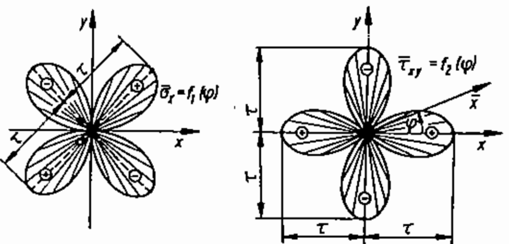
Slika 2.16. Čisto smicanje ekvivalentno je rastezanju i sabijanju u međusobno okomitim presjecima jednakim intenzitetom

Grafičko rješenje. Na slici 2.17a prikazan je još jednom element s ucrtanim naprezanjem. Presjek A predstavljen je u Mohrovoj kružnici točkom A koja se nalazi ispod osi apscisa jer naprezanje τ_{xy} „okreće" suprotno od smjera kazaljke na satu. Presjek B prikazan je točkom B u Mohrovoj kružnici iznad osi apscisa. Obje točke leže na osi ordinata jer je u oba slučaja normalno naprezanje jednako nuli. Središte kružnice S nalazi se u ishodištu O, tj. u raspolovnici dužine AB. Da bismo odredili glavne presjeke, odnosno glavne pravce naprezanja kroz točku A na Mohrovoj kružnici, povlačimo paralelu s osi x, a kroz točku B paralelu s osi y. U njihovu sjecištu nalazi se pol P. U tom slučaju pol P podudara se s točkom A. Spojnica pola P i točke C definira pravac naprezanja σ_1, a spojnica PD pravac naprezanja σ_2. Orijentirani element s ucrtanim glavnim naprezanjima prikazan je na slici 2.17c.



Slika 2.17. Mohrova kružnica naprezanja za čisto smicanje

Konstrukcija dijagrama $\sigma_x = f_1(\varphi)$ i $\tau_{xy} = f_2(\varphi)$. Ako iz pola P povučemo pravac pod kutom φ, dobit ćemo točku E čija apscisa i ordinata u nekom mjerilu predstavljaju normalno i posmično naprezanje σ_x i τ_{xy}. Pri promjeni kuta φ pomiče se točka E po Mohrovoj kružnici. Na taj način, možemo lako odrediti ovisnost $\overline{\sigma}_x$ i $\overline{\tau}_{xy}$ o kutu φ. Ta je zavisnost prikazana polarnim dijagramom na slici 2.18.



Slika 2.18. Ovisnost normalnog i posmičnog naprezanja u orijentaciji presjeka pri čistom smicanju

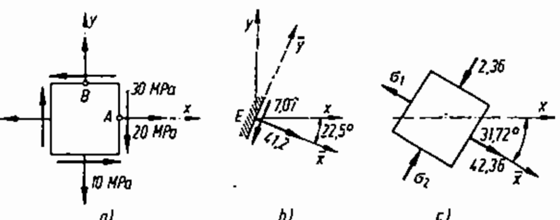
PRIMJER 2.3

Zadano je stanje naprezanja $\sigma_x = 30$ MPa, $\sigma_y = 10$ MPa, $\tau_{xy} = -20$ MPa. Treba odrediti:

- naprezanja $\overline{\sigma}_x$ i $\overline{\tau}_{xy}$ u presjeku E čija normala čini kut $\varphi = -22{,}5°$ s osi x,
- glavna naprezanja σ_1 i σ_2 i skicirati orijentirani element,
- maksimalno tangencijalno naprezanje s pripadnim normalnim naprezanjima.

Zadatak riješiti analitički i grafički pomoću Mohrove kružnice.

Prije nego priđemo rješavanju zadatka, skicirat ćemo element s pripadnim naprezanjima, prema slici 2.19a, i na elementu označiti presjeke A i B.



Slika 2.19

Budući da su normalna naprezanja pozitivna, ucrtana su kao vlačna. Posmična naprezanja su negativna, pa je strelica koja prikazuje τ_{xy} na pozitivnom presjeku A ucrtana u negativnom smjeru.

Analitičko rješenje. Naprezanja $\overline{\sigma}_x$ i $\overline{\tau}_{xy}$ odredit ćemo pomoću izraza (2.19) koji glase

$$\overline{\sigma}_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi$$
$$\overline{\tau}_{xy} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi. \qquad \text{(a)}$$

Poluzbroj i polurazlika glavnih naprezanja; $\sin 2\varphi$ i $\cos 2\varphi$, više puta će se pojaviti u toku izrade zadatka, pa je preporučljivo da ih izračunamo prije uvrštavanja. Te veličine u navedenom primjeru iznose:

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 20\ \text{MPa}, \quad \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = 10\ \text{MPa}$$
$$\cos 2\varphi = 0{,}7071 \qquad \sin 2\varphi = -0{,}7071. \qquad \text{(b)}$$

Uvrstimo li (b) i ostale podatke u (a), dobit ćemo

$$\overline{\sigma}_x = 20 + 10\,(0{,}7071) - 20\,(-0{,}7071) = 41{,}213\ \text{MPa}$$
$$\overline{\tau}_{xy} = -10\,(-0{,}7071) - 20\,(0{,}7071) = -7{,}071\ \text{MPa}.$$

Presjek E s ucrtanim naprezanjima prikazan je na slici 2.19b. Brojke izražavaju samo apsolutnu vrijednost, a predznak je određen smjerom strelice. Budući da je naprezanje $\overline{\tau}_{xy}$ negativno, strelica koja ga prikazuje ucrtana je na pozitivnom presjeku E u negativnom smjeru.

Prema izrazu (2.26) glavna naprezanja iznose

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 20 \pm \sqrt{10^2 + (-20)^2}.$$

Odavde je $\sigma_1 = 42{,}36$ MPa i $\sigma_2 = 2{,}36$ MPa. Kut pravaca glavnih naprezanja dobit ćemo pomoću izraza (2.22), tj.

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} = \frac{-20}{10} = -2.$$

Vidimo da je

$$2\varphi_0' = -63{,}43° \qquad 2\varphi_0'' = 116{,}57°,$$

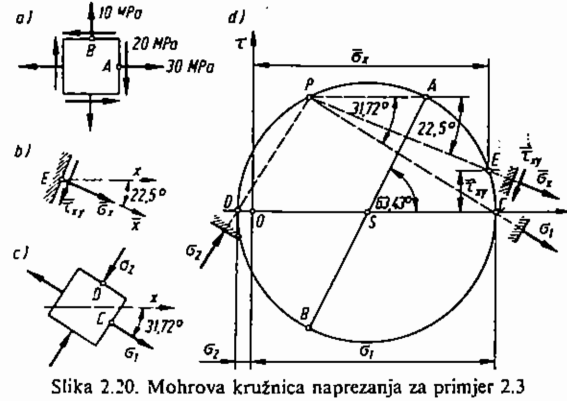
odnosno

$$\varphi_0' = -31{,}72° \qquad \varphi_0'' = 58{,}28°.$$

Kako je σ_x veće, normalno naprezanje, σ_1 čini s osi x kut manji od 45°, tj. kut $\varphi_0' = -31{,}72°$ određuje smjer σ_1. Orijentirani element prikazan je na slici 2.19c.

Rješenje pomoću Mohrove kružnice. U koordinatnom sustavu σ, τ crtamo točke A (30, 20) i B (10, −20), koje predstavljaju naprezanja na presjecima A i B. U sjecištu spojnice $\overline{AB}$ i osi σ nalazi se središte kružnice S. Iz S opišimo kružnicu polumjera $\overline{SA} = \overline{SB}$. Kružnica siječe os σ u točkama C i D. Dužina $\overline{OC}$ predstavlja u mjerilu σ_1, a dužina $\overline{OD}$ σ_2. Pol Mohrove kružnice P dobit ćemo ako iz točke A na kružnici povučemo paralelu s osi x. Pravac $\overline{PC}$ definira smjer σ_1, a pravac $\overline{PD}$ smjer σ_2. Da bismo odredili naprezanja u presjeku E, povlačimo kroz pol P paralelu s osi x. Ta paralela siječe Mohrovu kružnicu u točki E. Apscisa i ordinata

te točke predstavljaju naprezanja $\overline{\sigma}_x$ i $\overline{\tau}_{xy}$. Naprezanje $\overline{\sigma}_x$ je vlačno, a $\overline{\tau}_{xy}$ „okreće“ u smjeru kazaljke na satu, kako je prikazano na slici 2.20b.

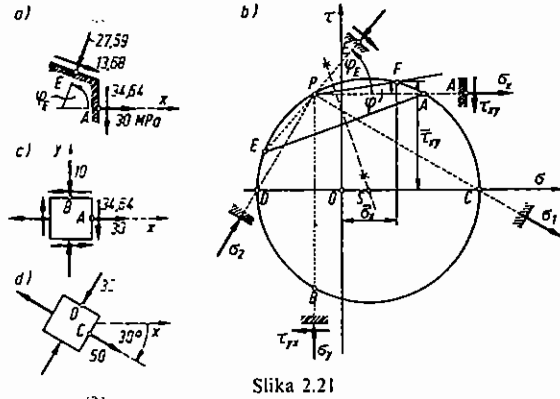


Slika 2.20. Mohrova kružnica naprezanja za primjer 2.3

PRIMJER 2.4

Zadano je stanje naprezanja prema slici 2.21a (upisane su samo apsolutne vrijednosti komponenata naprezanja). Pomoću Mohrove kružnice treba naći: kut φ_E, glavna naprezanja σ_1 i σ_2 i naprezanje σ_y. Skicirati funkcije $\sigma_x = f_1(\varphi)$, $\tau_{xy} = f_2(\varphi)$.

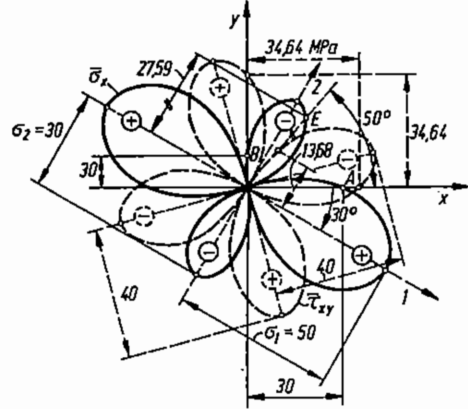
Rješenje pomoću Mohrove kružnice dobit ćemo prema slici 2.21b. U koordinatnom sustavu $O\sigma\tau$ označimo točke $A(30;34{,}64)$ i $E(27{,}59;13{,}68)$. Obje točke nalaze se iznad osi σ jer odgovarajuća posmična naprezanja „okreću“ u smjeru kazaljke na satu. Simetrala dužine AE siječe os σ u točki S. Iz S opisujemo Mohrovu kružnicu polumjera $\overline{SE} = \overline{SA}$. Zatim kroz točku A na Mohrovoj kružnici povlačimo paralelu s osi x. Ta paralela siječe kružnicu u točki P, koja je pol kružnice. Ako iz P povučemo paralelu s osi y, dobit ćemo točku B čije koordinate određuju naprezanja $\sigma_y = -10$ MPa i $\tau_{yx} = 34{,}64$ MPa.



Slika 2.21

Apscise točaka C i D predstavljaju glavna naprezanja $\sigma_1 = 50$ MPa i $\sigma_2 = -30$ MPa. Kut φ_E jednak je kutu između pravaca $\overline{PA}$ i $\overline{PE}$ na Mohrovoj kružnici i iznosi 50°. Element u koordinatnom sustavu Oxy prikazan je na slici 2.21c, a orijentirani element na slici 2.21d.

Da bismo odredili komponente naprezanja $\overline{\sigma}_x$ i $\overline{\tau}_{xy}$ na proizvoljnom presjeku koji čini s osi x kut φ, povlačimo iz P pravac pod kutom φ. Taj pravac siječe Mohrovu kružnicu u točki F čije koordinate određuju naprezanja $\overline{\sigma}_x$ i $\overline{\tau}_{xy}$. Mijenjajući kut φ, možemo odrediti funkcije $\overline{\sigma}_x = f_1(\varphi)$ i $\overline{\tau}_{xy} = f_2(\varphi)$. Te su funkcije prikazane na slici 2.22.



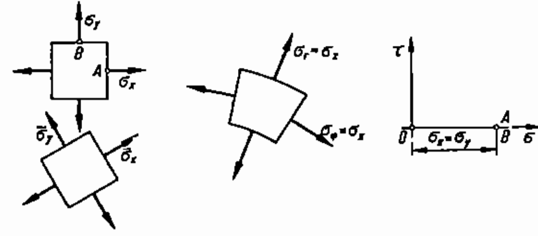
Slika 2.22. Ovisnost normalne i posmične komponente naprezanja o kutu φ

PRIMJER 2.5

Na element prema slici 2.23 djeluju naprezanja $\sigma_x = \sigma_y$. Pomoću Mohrove kružnice naći komponente naprezanja $\overline{\sigma}_x$ i $\overline{\tau}_{xy}$ u proizvoljno orijentiranom presjeku. Naći izraze za komponente naprezanja u polarnim koordinatama.

Kako je $\sigma_x = \sigma_y$, a $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$, obje točke: $A(\sigma_x, \tau_{xy})$ i $B(\sigma_y, \tau_{yx})$, u koordinatnom sustavu $O\sigma\tau$ padaju zajedno. Mohrova kružnica postaje točka. Posmično naprezanje u svim je presjecima jednako nuli, a normalna su naprezanja u svim presjecima jednaka i iznose σ_x. Prema tome će i u polarnim koordinatama biti

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_x \qquad \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r} = 0.$$

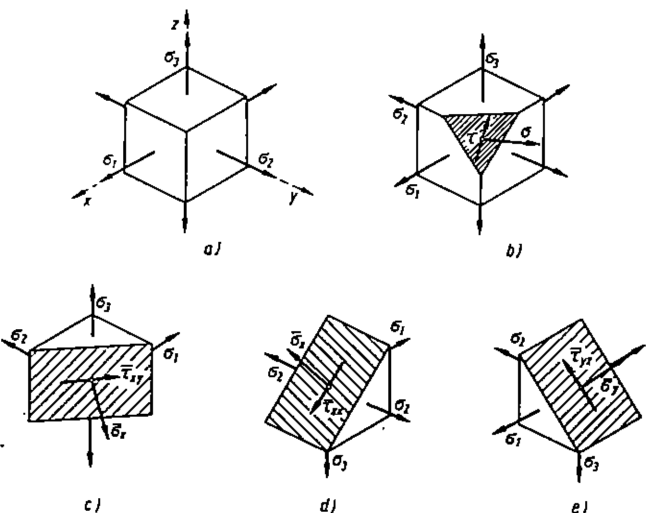


Slika 2.23. Mohrova kružnica za jednoliko rastezanje u svim smjerovima reducira se na točku

2.9. Mohrova kružnica za prostorno (troosno) naprezanje

Do sada smo proučavali zakone transformacija ravninskog stanja naprezanja. Izraze (2.19) izveli smo postavljanjem jednadžbi ravnoteže elementa u ravnini xy za slučaj kad je $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$. Kako naprezanje σ_z ne utječe na ravnotežu u ravnini yz, navedeni izrazi vrijede i kad je $\sigma_z \neq 0$. Na sličan način, kao i u ravnini, možemo razmatranjem ravnoteže elementa u prostoru dobiti izraze za transformaciju troosnog naprezanja. Zbog složenosti nećemo izvoditi izraze za opću transformaciju tenzora naprezanja, nego ćemo se ograničiti na neke jednostavnije slučajeve, tj. na određivanje naprezanja u presjecima paralelnim s jednim od glavnih pravaca naprezanja.

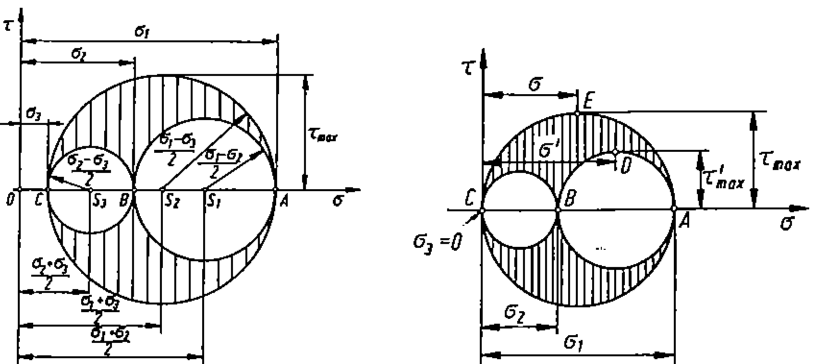
Razmotrimo element prema slici 2.24a. Odaberimo osi x, y i z u pravcu naprezanja σ_1, σ_2, odnosno σ_3, kako je prikazano na slici. Presiječemo li element ravninom koja je paralelna s naprezanjem σ_3, element će izgledati kao na slici 2.24c. Veličinu naprezanja $\overline{\sigma}_x$ i $\overline{\tau}_{xy}$ možemo odrediti pomoću Mohrove kružnice kojoj su ekstremne vrijednosti σ_1 i σ_2. Ta kružnica prikazana je na slici 2.25 i prolazi kroz tačke A i B. Presiječemo li element ravninom koja je paralelna s naprezanjem σ_2, dobit ćemo element prema slici 2.24d. Naprezanja $\overline{\sigma}_z$ i $\overline{\tau}_{zx}$ koja djeluju na presjeku



Slika 2.24. Transformacija troosnog stanja naprezanja

možemo dobiti pomoću kružnice koju definiraju naprezanja σ_1 i σ_3, a prolazi kroz točke A i C. Element koji je presječen ravninom paralelnom s naprezanjem σ_1 prikazan je na slici 2.24e. Naprezanja $\overline{\sigma}_y$ i $\overline{\tau}_{yz}$ možemo odrediti pomoću kružnice koja je definirana naprezanjima σ_2 i σ_3. Ta kružnica prolazi kroz točke B i C na slici 25.

Presiječemo li element proizvoljno orijentiranom ravninom, kako je prikazano na slici 2.24b, ne možemo jednostavno odrediti naprezanja σ i τ koja djeluju na tom presjeku. U *Višoj nauci o čvrstoći*, odnosno u *Teoriji elastičnosti* pokazuje se da naprezanja na proizvoljno orijentiranom presjeku određuju točke unutar iscrtkanog područja na slici 2.25, tj. unutar područja koje leži između tri Mohrove kružnice. Prema slici 2.25 vidimo da će se maksimalno naprezanje pojaviti u presjeku koji čini kut od 45° s presjecima na kojima djeluju naprezanja σ_1 i σ_3.



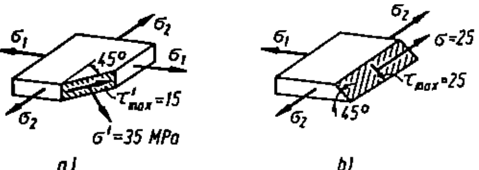
Slika 2.25. Mohrova kružnica za troosno stanje naprezanja

Slika 2.26. Mohrova kružnica naprezanja u primjeru 2.6

PRIMJER 2.6

Zadano je stanje naprezanja: $\sigma_1 = 50\,\mathrm{MPa}$, $\sigma_2 = 20\,\mathrm{MPa}$ i $\sigma_3 = 0$. Naći maksimalno tangencijalno naprezanje τ_{max}.

Zadatak ćemo riješiti pomoću Mohrove kružnice naprezanja, koja je prikazana na slici 2.26. Vidimo da je maksimalno naprezanje τ_{max} jednako polumjeru najveće Mohrove kružnice. Polumjer kružnice koja prolazi kroz točke A i B, tj. kružnice definirane naprezanjima σ_1 i σ_2, jednak je sekundarnom maksimalnom naprezanju τ'_{max}. Naprezanje τ'_{max} leži u istoj ravnini kao i naprezanja σ_1 i σ_2 i čini s njima kut



Slika 2.27. Ravnine najvećeg posmičnog naprezanja

od 45°, kako je prikazano na slici 2.27a. Istovremeno na tom presjeku djeluje i normalno naprezanje $\sigma' = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$, koje je jednako apscisi točke D sa slike 2.26. Naprezanje τ_{max} leži u ravnini koja je paralelna s pravcem naprezanja σ_2 i čini kut od 45° s naprezanjem σ_1, kako je prikazano na slici 2.27b.

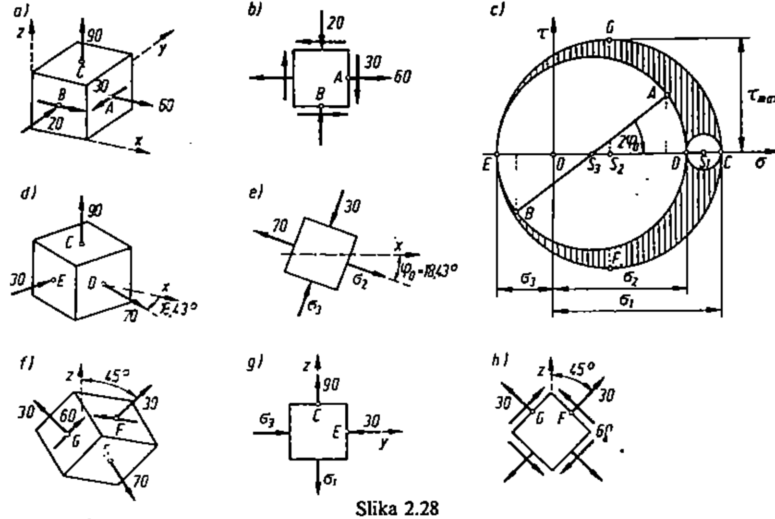
PRIMJER 2.7

Zadano je stanje naprezanja

$$[\sigma_{ij}]=\begin{bmatrix} 60 & -30 & 0 \\ -30 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 90 \end{bmatrix}\ \text{MPa}.$$

Naći maksimalno naprezanje τ_{max} i glavna naprezanja σ_1, σ_2, σ_3.

Na slici 2.28b prikazane su komponente naprezanja koje djeluju u ravnini xy. Naprezanje σ_z ne utječe na ravnotežu elementa u smjeru osi x ili y, pa ga ne moramo uzimati u obzir pri konstruiranju Mohrove kružnice koja se odnosi na ravninu xy. U sustavu $O\sigma\tau$ nanesimo točke A (60, 30) i B (−20, −30) i kroz njih povucimo kružnicu sa središtem u S_3 (30, 0). Ta kružnica siječe os σ u točkama D i E koje određuju naprezanja $\sigma_2=70$ MPa i $\sigma_3=-30$ MPa, dok je $\sigma_z=\sigma_1=90$ MPa.



Slika 2.28

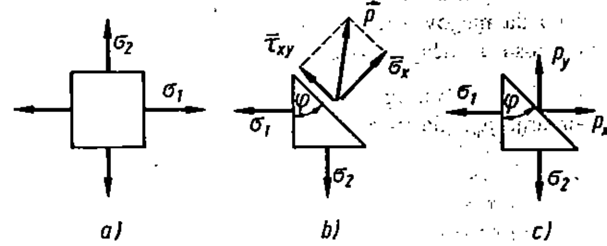
Točka D otklonjena je od točke A za kut $2\varphi_0=36{,}87°$ u smjeru kazaljke na satu, pa je i σ_2 otklonjen od pravca σ_x za kut $\varphi_0=18{,}43°$, također u smjeru kazaljke na satu, kako je prikazano na slici 2.28d i e. Sada znamo sva tri glavna naprezanja, pa možemo konstruirati sve tri Mohrove kružnice za troosno napregnuto stanje, prema slici 2.28c. S te slike možemo očitati $\sigma_{max}=60$ MPa. Točke F i G na Mohrovoj kružnici određuju naprezanja na presjecima u kojima djeluje τ_{max}. Kako se te točke nalaze na kružnici definiranoj sa σ_1 i σ_3, presjeci τ_{max} čine kut od 45° s presjecima σ_1 i σ_3. Element s ucrtanim maksimalnim posmičnim naprezanjima i s pripadnim normalnim naprezanjima pirkazan je na slici 2.28f. Budući da je točka F na Mohrovoj kružnici otklonjena za 90° u smjeru kazaljke na satu od točke C, bit će i presjek F otklonjen od presjeka C za 45°, također u smjeru kazaljke na satu, što je ilustrirano na slici 2.28g i h.

2.10. Elipsa naprezanja i elipsoid naprezanja

Na slici 2.29a prikazan je element na koji djeluju glavna naprezanja σ_1 i σ_2. Presijecimo taj element kosom ravninom kao na slici 2.29b. Na tom kosom presjeku djeluje vektor naprezanja $\vec{p}$ koji možemo rastaviti u normalnu i posmičnu komponentu σ_x i τ_{xy} ili na komponente p_x i p_y, kao na slici 2.29c. Uvjeti ravnoteže elementa na slici 2.29c glase

$$\Sigma F_x = p_x\,d\bar{y} - \sigma_1\,dy = 0$$

$$\Sigma F_y = p_y\,d\bar{y} - \sigma_2\,dx = 0.$$



Slika 2.29. Uz izvod elipse naprezanja

Ako te izraze podijelimo s $d\bar{y}$ i sredimo, vodeći pritom računa o tome da je $dx/d\bar{y}=\sin\varphi$ i $dy/d\bar{y}=\cos\varphi$, dobit ćemo

$$p_x=\sigma_1\cos\varphi$$
$$p_y=\sigma_2\sin\varphi, \tag{2.29}$$

odnosno

$$\frac{p_x}{\sigma_1}=\cos\varphi$$

$$\frac{p_y}{\sigma_2}=\sin\varphi.$$

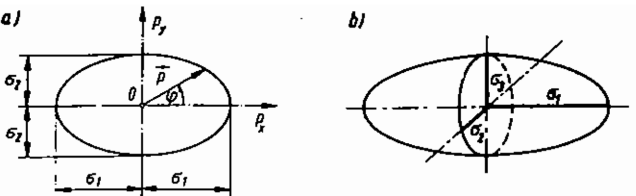
Te izraze treba sada kvadrirati i zbrojiti, pa ćemo dobiti

$$\left(\frac{p_x}{\sigma_1}\right)^2+\left(\frac{p_y}{\sigma_2}\right)^2=1. \tag{2.30}$$

Taj izraz predstavlja elipsu u koordinatnom sustavu Op_xp_y. Glavne poluosi elipse su σ_1 i σ_2. Elipsa je prikazana na slici 2.30.

Na sličan način možemo za prostorno naprezanje izvesti jednadžbu elipsoida naprezanja koja glasi

$$\frac{p_x^2}{\sigma_1^2}+\frac{p_y^2}{\sigma_2^2}+\frac{p_z^2}{\sigma_3^2}=1. \tag{2.31}$$



Slika 2.30. Elipsa i elipsoid naprezanja

Razmatranjem izraza (2.31) možemo zaključiti ovo:

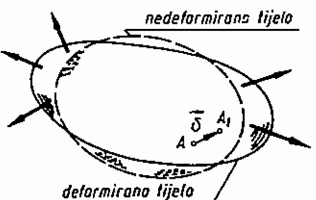
a) Pri promjeni orijentacije presjeka kroz neku točku vektor naprezanja mijenja se tako da njegov vrh opisuje elipsoid u slučaju troosnog naprezanja, odnosno elipsu u slučaju dvoosnog naprezanja.

b) Najveća vrijednost punog naprezanja p_{max} jednaka je glavnom naprezanju σ_1, a najmanja p_{min} glavnom naprezanju σ_3.

3. DEFORMACIJA

3.1. Pomak, duljinska, kutna i obujamna deformacija

Pod djelovanjem vanjskih sila tijela se deformiraju, tj. mijenjaju svoj oblik i dimenzije. Pojedine čestice tijela pomiču se u nove položaje. Vektor koji spaja početni i konačni položaj čestice naziva se vektor pomaka. Pomak se razlikuje od puta koji je čestica prevalila u toku deformiranja i koji ne mora biti pravac. Na slici 3.1 crtkano je prikazano nedeformirano tijelo, a punom crtom deformirano. Točka A određuje početni položaj, a točka A_1 konačni položaj jedne čestice. Vektor $\vec{\delta}=\overrightarrow{AA_1}$ jest vektor pomaka čestice. Iako deformacije tijela ovise o opterećenju i elastičnim svojstvima tijela, pojam deformacije sam je po sebi geometrijski pojam i može se razmatrati neovisno o opterećenju i elastičnim svojstvima tijela.

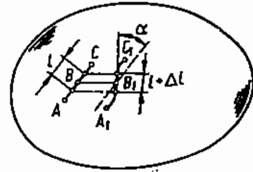


Slika 3.1. Vektor pomaka

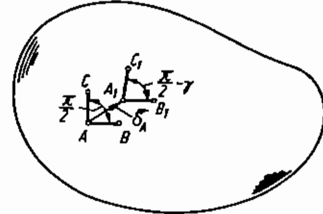
Deformiranje tijela očituje se promjenom veličine (volumena) i promjenom oblika. Zamislimo gumenu ploču na kojoj smo ucrtali razne likove: kvadrate, kružnice i sl. Ako ploču rastežemo tako jednoliko u njenoj ravnini, da se dimenzije likova mijenjaju, pri čemu kvadrat ostaje kvadrat, a kružnica kružnica, kažemo da je došlo samo do promjene veličine, dok je oblik ostao isti. Prelazi li kružnica u elipsu, a kvadrat u pravokutnik ili romb, pri čemu površina lika ostaje nepromijenjena, kažemo da je došlo do promjene oblika. U najvećem broju slučajeva tijelo se deformira tako da istovremeno mijenja i oblik i veličinu.

Pojam deformacija u nekoj točki B tijela vezan je uz promjenu oblika i veličine neposredne okoline te točke. Zamislimo pravac ABC koji prolazi kroz točku B. Sve čestice tijela koje su ležale na pravcu ABC ležat će nakon deformiranja na nekoj krivulji $A_1B_1C_1$, kako je prikazano na slici 3.2. Vrlo mali element pravca duljine l

nakon deformiranja promijenit će duljinu za iznos Δl. Istovremeno će promijeniti orijentaciju za mali kut α. U vezi s tim definirat ćemo duljinsku i kutnu deformaciju. Kako kroz jednu točku možemo povući beskonačno mnogo pravaca, mogli bismo očekivati da je za poznavanje stanja deformacije u toj točki potrebno poznavati beskonačno mnogo podataka. Na kraju poglavlja pokazat ćemo da je nužno i dovoljno poznavati duljinsku i kutnu deformaciju samo za tri međusobno okomita pravca. Definiciju kutne i duljinske deformacije dat ćemo pomoću slike 3.3. Dvije male dužine AB i AC tvore pravi kut BAC. Nakon deformiranja tijela čestice B, A i C prelaze u položaj B_1, A_1 i C_1. Duljinsku deformaciju označavamo s ε, a kutnu s γ. Indeksima označavamo pravce, odnosno osi na koje se odnosi deformacija.



Slika 3.2. Deformacija infinitezimalne dužine



Slika 3.3. Definicija duljinske i kutne deformacije

Po definiciji duljinska je deformacija u točki A za pravac AB određena izrazom

$$\varepsilon_{AB}=\lim_{B\to A}\frac{\overline{A_1B_1}-\overline{AB}}{\overline{AB}}, \tag{3.1}$$

dok je za pravac AC

$$\varepsilon_{AC}=\lim_{C\to A}\frac{\overline{A_1C_1}-\overline{AC}}{\overline{AC}}. \tag{3.1a}$$

Općenito možemo reći da je duljinska deformacija definirana izrazom

$$\varepsilon=\lim_{l\to 0}\frac{\Delta l}{l}. \tag{3.2}$$

Prema tom izrazu duljinska deformacija predstavlja relativno produljenje.

U izrazu (3.3) nije naznačeno na koji se pravac odnosi, zato znak ε nema indeksa koji bi se odnosio na određeni pravac ili os. Kutna deformacija definira se uvijek u odnosu na dva međusobno okomita pravca i izražava iznos za koji će se promijeniti pravi kut među tim pravcima. Kutna deformacija u točki A na slici 3.3 za pravce AB i AC definirana je izrazom

$$\gamma_{ABC}=\lim_{\substack{B\to A\\ C\to A}}(\sphericalangle ABC-\sphericalangle A_1B_1C_1). \tag{3.3}$$

Analogno izrazu (3.3) definira se obujamna ili volumenska deformacija Θ:

$$\Theta=\lim_{V\to 0}\frac{\Delta V}{V}. \tag{3.5}$$

Ona izražava relativnu promjenu obujma. Za trodimenzionalno tijelo mogu se definirati tri duljinske i tri kutne deformacije koje izražavaju relativno produljenje tri međusobno okomite dužine, odnosno promjene pravih kutova koje one čine. Duljinska deformacija, kutna deformacija i obujamna deformacija bezdimenzionalne su veličine.

3.2. Tenzor deformacije, matrica tenzora deformacije

Kao što smo rekli, za potpuno opisivanje deformacije u jednoj točki nužno je i dovoljno poznavati duljinske i kutne deformacije koje određuju tri međusobno okomite dužine. Ukupno imamo tri duljinske deformacije: ε_x, ε_y, ε_z i šest kutnih deformacija: γ_{xy}, γ_{yx}, γ_{yz}, γ_{zy}, γ_{zx}, γ_{xz}, koje su definirane ovako:

$$\varepsilon_x=\frac{\text{produljenje infinitezimalne dužine paralelne s osi } x}{\text{početna duljina te dužine}}$$

$\gamma_{xy}=\gamma_{yx}$ = promjena pravog kuta koji čine infinitezimalne dužine paralelne s osima x i y.

Tako definirana kutna deformacija upotrebljava se u tehničkoj literaturi. Da bi matrica deformacije predstavljala tenzor, upotrebljava se tenzorska kutna deformacija ε_{xy} koja je definirana izrazom

$$\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\gamma_{xy}.$$

Matrica tenzora deformacije $[\varepsilon_{ij}]$ glasi

$$[\varepsilon_{ij}]=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz}\end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Upotrijebimo li oznake uobičajene u tehničkoj literaturi, matrica tenzora deformacija glasit će

$$[\varepsilon_{ij}]=\begin{bmatrix}\varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz}\\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz}\\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z\end{bmatrix} \tag{3.7}$$

Umjesto naziva duljinska deformacija upotrebljavaju se i nazivi linijska deformacija i normalna deformacija, a umjesto naziva kutna deformacija upotrebljava se naziv posmična deformacija. Ti nazivi potječu otuda što kod izotropnih materijala

normalno naprezanje izaziva samo duljinsku (normalnu) deformaciju, a posmično naprezanje samo kutnu (posmičnu) deformaciju. Međutim, kako kod anizotropnih materijala normalno naprezanje može izazvati i kutnu deformaciju, a posmično duljinsku, ti nazivi nisu u cijelosti opravdani.

U većini tehničkih konstrukcija i strojeva pri normalnom radu deformacije su vrlo male veličine. Obično su reda veličine 0,0001 do 0,001. Rijetko prelaze veličinu 0,001. Takve deformacije zovu se male deformacije i pri izvodima mogu se njihovi kvadrati zanemariti u odnosu na same deformacije. Sve deformacije koje razmatramo u nauci o čvrstoći su male deformacije, osim kad je to posebno naglašeno.

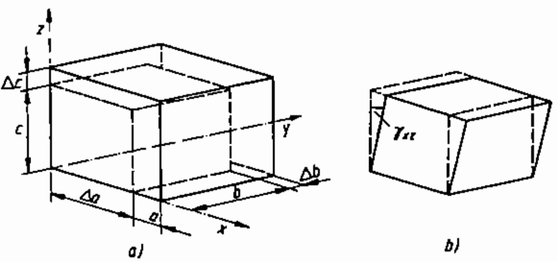
3.3. Veza obujamne deformacije i duljinskih deformacija

Na slici 3.4a crtkano prikazan je elementarni kvadar u nedeformiranom tijelu, a punom crtom isti kvadar deformiran. U nedeformiranom stanju tijela kvadar ima stranice a, b i c, a u deformiranom stanju $a+\Delta a$, $b+\Delta b$ i $c+\Delta c$. Obujam nedeformiranog elementa iznosi

$$V=abc, \tag{3.8}$$

dok je obujam deformiranog elementa

$$V+\Delta V=(a+\Delta a)(b+\Delta b)(c+\Delta c). \tag{3.9}$$



Slika 3.4. Veza duljinskih deformacija i obujamne deformacije

Odavde možemo odrediti prirast obujma

$$\Delta V=(V+\Delta V)-V. \tag{3.10}$$

Kad se izrazi (3.8) i (3.9) uvrste u izraz (3.10), i on se sredi, dobit će se

$$\Delta V=ab\Delta c+ac\Delta b+bc\Delta a+a\Delta b\Delta c+b\Delta a\Delta c+c\Delta a\Delta b+\Delta a\Delta b\Delta c. \tag{3.11}$$

Srednja obujamna deformacija iznosi

$$\Theta_{sr}=\frac{\Delta V}{V}. \tag{3.12}$$

Nakon uvrštavanja izraza (3.8) i (3.11) u izraz (3.12) i sređivanja bit će

$$\Theta_{sr}=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}+\frac{\Delta c}{c}+\frac{\Delta a}{a}\cdot\frac{\Delta b}{b}+\frac{\Delta b}{b}\cdot\frac{\Delta c}{c}+\frac{\Delta c}{c}\cdot\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta a}{a}\cdot\frac{\Delta b}{b}\cdot\frac{\Delta c}{c}. \tag{3.13}$$

Pravu obujamnu deformaciju dobit ćemo graničnim prelazom kad $\Delta V\to 0$, tj. kad $\Delta a\to 0$, $\Delta b\to 0$, $\Delta c\to 0$. U tom je slučaju

$$\lim_{a\to 0}\frac{\Delta a}{a}=\varepsilon_x,\quad \lim_{b\to 0}\frac{\Delta b}{b}=\varepsilon_y,\quad \lim_{c\to 0}\frac{\Delta c}{c}=\varepsilon_z. \tag{3.14}$$

Sada izraz za Θ glasi

$$\Theta=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z+\varepsilon_x\varepsilon_y+\varepsilon_y\varepsilon_z+\varepsilon_z\varepsilon_x+\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z.$$

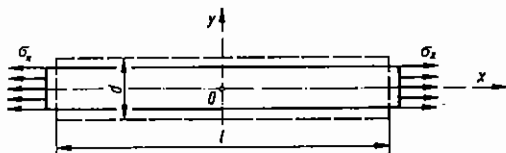
Kad se radi o malim deformacijama, kvadrate i više potencije možemo zanemariti, pa je

$$\Theta=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z. \tag{3.15}$$

Pri razmatranju volumenske deformacije nismo uzeli u obzir utjecaj kutnih deformacija, jer pri malim deformacijama one ne utječu na promjenu volumena, što je vidljivo na slici 3.4b. Na toj je slici prikazana samo kutna deformacija γ_{xz}. Osnovica elementa ostala je ista, a visina elementa nije se promijenila do uključivo male veličine prvog reda.

PRIMJER 3.1

Na štap promjera $d=20$ mm i duljine $l=200$ mm djeluju na krajevima jednoliko raspodijeljena normalna naprezanja, slika 3.5. Mjerenjima je ustanovljeno da se štap produljio za 0,3 mm, a promjer smanjio za 0,01 mm. Odrediti uzdužnu deformaciju ε_x i poprečnu deformaciju ε_y.



Slika 3.5

$$\varepsilon_x=\frac{\Delta l}{l}=\frac{0{,}03}{200}=0{,}0015$$

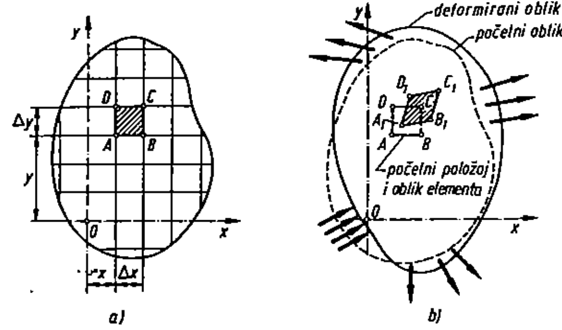
$$\varepsilon_y=\frac{\Delta d}{d}=\frac{-0{,}01}{20}=-0{,}0005.$$

Izračunate veličine su srednje vrijednosti; međutim, kako su deformacije u štapu homogene, one su ujedno prave ili stvarne deformacije.

3.4. Transformacija tenzora deformacije

Zamislimo ravninski model prema slici 3.6 i na njemu ucrtanu pravokutnu mrežu. Uočimo pravokutni element $ABCD$. Ako model opteretimo, svaka njegova točka izvršit će drugačiji pomak. Sam element $ABCD$ promijenit će i svoj položaj i

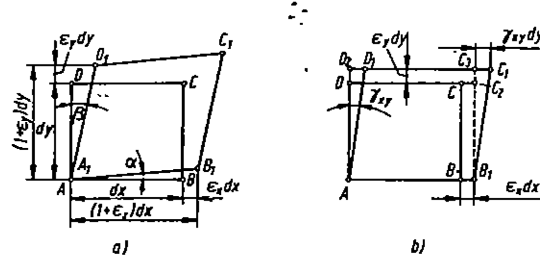
svoj oblik. Očito da translacija i rotacija elementa kao krute figure ne utječu na promjenu oblika i veličine elementa, pa se mogu pri analizi deformacije elementa isključiti iz razmatranja. Radi jasnoće slike deformacija elementa prikazana je uvećano, ali treba imati na umu da su promjene kuta reda veličine lučne minute, a



Slika 3.6. Deformiranje ravne ploče

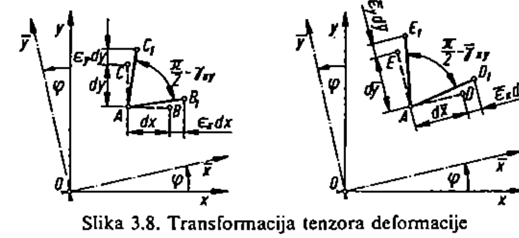
promjene duljine manje od 0,1%. Radi lakše analize dovest ćemo translacijom elementa točku A_1 u početni položaj, kako je prikazano na slici 3.7a, a zatim malom rotacijom elementa kao krute figure oko A postaviti dužinu AB_1 iznad dužine AB, kao na slici 3.7b. Prema toj slici vrijedi

$$\overline{CC_2}=\overline{BB_1}=\varepsilon_x\,dx$$
$$\overline{C_2C_3}=\overline{DD_2}=\varepsilon_y\,dy \qquad (3.16)$$
$$\overline{C_3C_1}=\overline{AD_2}\,\gamma_{xy}\approx\gamma_{xy}\,dy.$$



Slika 3.7. Analiza deformiranja infinitezimalnog elementa

Znamo li komponente tenzora deformacije u zadanom koordinatnom sustavu Oxy, možemo odrediti komponente deformacija u proizvoljno orijentiranom koordinatnom sustavu $O\bar{x}\bar{y}$. Radi jednostavnosti ograničit ćemo se na razmatranje ravninske deformacije. Slika 3.8 definira nam značenje komponenata ε_x, ε_y i γ_{xy} u koordinatnom sustavu Oxy i $\bar{\varepsilon}_x$, $\bar{\varepsilon}_y$ i $\bar{\gamma}_{xy}$ u koordinatnom sustavu $O\bar{x}\bar{y}$.

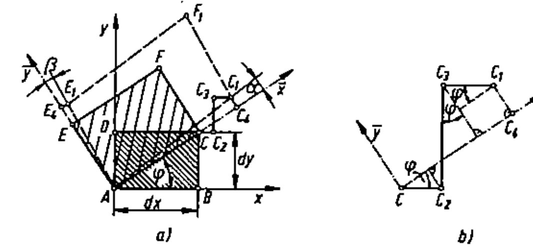


Slika 3.8. Transformacija tenzora deformacije

Postupak izvođenja izraza za transformaciju komponenata deformacije ilustrirat ćemo pomoću slike 3.9. Neka su nam u točki A zadane komponente ε_x, ε_y i γ_{xy} i kut φ koji čini sustav Axy sa sustavom $A\bar{x}\bar{y}$. Na osi x odaberimo točku C, a na osi y točku E. Udaljenost točaka C i E od točke A infinitezimalno je malena, tj. $\overline{AC}=d\bar{x}$ i $\overline{AE}=d\bar{y}$. Točke A, C, E i F kompletiraju infinitezimalni element $d\bar{x}\,d\bar{y}$ u sustavu $A\bar{x}\bar{y}$. Projiciranjem točke C na koordinatne osi x i y dobit ćemo točke B i D, pri čemu je

$$\overline{AB}=dx=d\bar{x}\cos\varphi \qquad (3.17)$$
$$\overline{AD}=dy=d\bar{x}\sin\varphi.$$

Nakon deformiranja tijela točke C, E i F prelaze u novi položaj C_1, E_1, F_1, kako je prikazano na slici 3.9a, pri čemu se dužina AC produljila za iznos $\overline{CC_4}$ i zarotirala za kut α. Dužina AE produljila se za iznos $\overline{EE_4}$ i zarotirala za kut β.



Slika 3.9. Analiza transformacije komponenata tenzora deformacije

Prema slici 3.9b projekcije pomaka točke C na osi $\bar{x}$ i $\bar{y}$ iznose

$$\overline{CC_4}=(\overline{CC_2}+\overline{C_3C_1})\cos\varphi+\overline{C_2C_3}\sin\varphi$$
$$\overline{C_1C_4}=-(\overline{CC_2}+\overline{C_3C_1})\sin\varphi+\overline{C_2C_3}\cos\varphi.$$

Ako u gornje izraze uvrstimo (3.16) i (3.17), dobit ćemo

$$\overline{CC_4}=(\varepsilon_x\,d\bar{x}\cos\varphi+\gamma_{xy}\,d\bar{x}\sin\varphi)\cos\varphi+\varepsilon_y\,d\bar{x}\sin^2\varphi$$
$$\overline{C_1C_4}=-(\varepsilon_x\,d\bar{x}\cos\varphi+\gamma_{xy}\,d\bar{x}\sin\varphi)\sin\varphi+\varepsilon_y\,d\bar{x}\sin\varphi\cos\varphi.$$

Kako je

$$\bar{\varepsilon}_x = \overline{CC_4}/\overline{AC} = \overline{CC_4}/\mathrm{d}\bar{x}$$

$$\alpha = \overline{C_1C_4}/\overline{AC_1} \approx \overline{C_1C_4}/\mathrm{d}\bar{x},$$

možemo pisati

$$\bar{\varepsilon}_x = \varepsilon_x \cos^2\varphi + \varepsilon_y \sin^2\varphi + \gamma_{xy}\cos\varphi\sin\varphi$$

$$\alpha = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\sin\varphi\cos\varphi - \gamma_{xy}\sin^2\varphi.$$

Deformaciju $\bar{\varepsilon}_y$ i kut β možemo dobiti sličnom analizom, odnosno pomoću izraza

$$\bar{\varepsilon}_y = \overline{EE_4}/\overline{AE}, \qquad \beta = \overline{E_1E_4}/\overline{AE}.$$

Te ćemo veličine, međutim, mnogo lakše dobiti ako uočimo da je

$$\bar{\varepsilon}_y(\varphi) = \bar{\varepsilon}_x(\varphi + \pi/2)$$

$$\beta(\varphi) = -\alpha(\varphi + \pi/2).$$

U izrazu za β predznak je negativan jer je pozitivan smjer kuta β suprotan od smjera kuta α. Prema tome možemo pisati

$$\bar{\varepsilon}_y = \varepsilon_x \sin^2\varphi + \varepsilon_y \cos^2\varphi - \gamma_{xy}\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\beta = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\sin\varphi\cos\varphi + \gamma_{xy}\cos^2\varphi.$$

Kako je $\bar{\gamma}_{xy} = \alpha + \beta$, bit će

$$\bar{\varepsilon}_x = \varepsilon_x \cos^2\varphi + \varepsilon_y \sin^2\varphi + \frac{1}{2}\gamma_{xy} 2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\bar{\varepsilon}_y = \varepsilon_x \sin^2\varphi + \varepsilon_y \cos^2\varphi - \frac{1}{2}\gamma_{xy} 2\sin\varphi\cos\varphi \tag{3.18}$$

$$\frac{1}{2}\bar{\gamma}_{xy} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{2}\gamma_{xy}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi).$$

Usporedimo li izraze (3.18) s izrazima (2.16) i (2.17), vidjet ćemo da među njima postoji analogija. Ako u izrazima (3.18) zamijenimo veličine ε_x, ε_y, $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$, $\bar{\varepsilon}_x$, $\bar{\varepsilon}_y$ i $\frac{1}{2}\bar{\gamma}_{xy}$ s veličinama σ_x, σ_y, τ_{xy}, $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$ i $\bar{\tau}_{xy}$, dobit ćemo izraze (2.16) i (2.17). Prema tome, možemo zaključiti da će i svi ostali izrazi biti analogni. Sve što smo rekli o transformaciji naprezanja vrijedi i za transformaciju deformacije. Tako je

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\varphi$$

$$\bar{\varepsilon}_y = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\varphi - \frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\varphi \tag{3.19}$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{xy} = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\cos 2\varphi$$

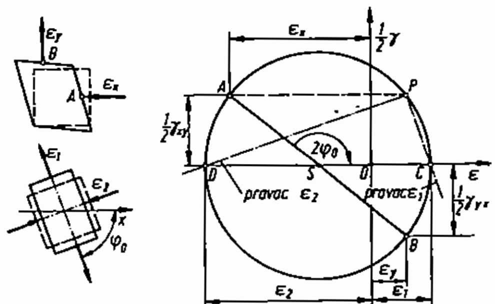
$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = \bar{\varepsilon}_x + \bar{\varepsilon}_y = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \text{konst.} \tag{3.20}$$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}. \tag{3.21}$$

Mohrova kružnica deformacije konstruira se potpuno analogno Mohrovoj kružnici naprezanja. Na osi apscisa nanose se duljinske deformacije, a na osi ordinata poloviĉne kutne deformacije. Ako je $\gamma_{xy} > 0$, crta se ispod osi ε. Nasuprot tome, ako je $\gamma_{yx} > 0$, crta se iznad osi ε.

PRIMJER 3.2

Zadano je stanje deformacije $\varepsilon_x = -200\cdot 10^{-6}$, $\varepsilon_y = 50\cdot 10^{-6}$, $\gamma_{xy} = -200\cdot 10^{-6}$. Pomoću Mohrove kružnice, slika 3.10, naći veličinu i pravce glavnih deformacija.



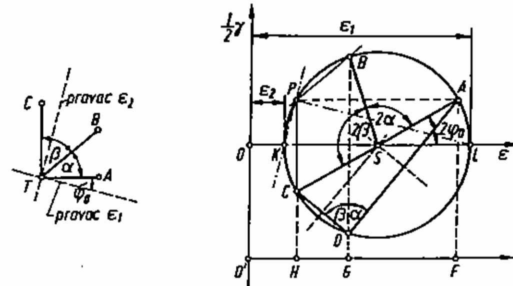
Slika 3.10. Mohrova kružnica deformacije

U koordinatnom sustavu ε, $\gamma/2$ crtamo točke A $(\varepsilon_x, \gamma_{xy}/2)$ i B $(\varepsilon_y, \gamma_{yx}/2)$. Točka A nalazi se iznad osi ε jer je $\gamma_{xy} = -200 < 0$, a točka B ispod osi ε jer je $\gamma_{yx} = -200 < 0$. Središte kružnice S nalazi se u sjecištu dužine $\overline{AB}$ i osi ε. Iz S povlačimo kružnicu polumjera $\overline{SA} = \overline{SB}$. Kružnica siječe os ε u točkama C i D koje određuju glavne deformacije: $\varepsilon_1 = 85\cdot 10^{-6}$ i $\varepsilon_2 = -235\cdot 10^{-6}$. Pol P odredit ćemo tako da kroz A povučemo paralelu s osi x. Pravci PC i PD određuju glavne pravce deformacija ε_1 i ε_2. Kut pravaca glavnih deformacija iznosi $\varphi_0 = 70{,}67°$.

PRIMJER 3.3

Elektrootpornički tenzometar jest uređaj pomoću kojeg možemo na principu promjene električnog otpora izmjeriti duljinsku deformaciju. Pomoću tri tenzometra: A, B i C, postavljena prema slici 3.11, izmjerene su duljinske deformacije ε_A, ε_B i ε_C. Naći veličinu i pravac glavnih deformacija ε_1 i ε_2. Zadatak riješiti pomoću Mohrove kružnice.

Mohrovu kružnicu deformacija konstruirat ćemo ovako: Povucimo horizontalnu liniju kroz O' i na njoj odredimo točke F, G, H tako da je $\overline{O'F}=\varepsilon_A$, $\overline{O'G}=\varepsilon_B$ i $\overline{O'H}=\varepsilon_C$. Veličine ε_A, ε_B i ε_C mogu biti pozitivne ili negativne. U ovom je slučaju uzeto kao da su sve tri pozitivne. Ako je neka veličina negativna, nanosimo je lijevo od O'. Kroz točke F, G i H povucimo okomice na $\overline{O'F}$. Odaberimo proizvoljnu



Slika 3.11. Mohrova kružnica deformacije

točku D na okomici kroz G. Kroz D povucimo pravce koji čine kutove α i β s okomicom kroz G. Sjecišta tih pravaca i okomica kroz F i H označimo s A i C. U sjecištu simetrala dužina $\overline{CD}$ i $\overline{AD}$ nalazi se središte kružnice S. Opišimo kružnicu iz S polumjera $\overline{SA}=\overline{SD}=\overline{SC}$. Okomica kroz G siječe kružnicu u točki B. Lako se možemo uvjeriti da je kut $\sphericalangle ASB=2\alpha$, jer je to središnji kut nad tetivom AB, dok je α obodni kut nad istom tetivom. Također je $\sphericalangle BSC=2\beta$. Točke K i L definiraju glavne deformacije ε_1 i ε_2. Da bismo odredili pravce glavnih deformacija, možemo konstruirati pol P ili možemo zaključiti da je pravac ε_1 otklonjen od pravca ε_A za kut φ_0 u smjeru kazaljke na satu jer je i točka L na Mohrovoj kružnici otklonjena od točke A za kut $2\varphi_0$ u istom smjeru.

4. GEOMETRIJSKE KARAKTERISTIKE RAVNIH PRESJEKA ŠTAPA

4.1. Težište i statički momenti površine

U mehanici krutih tijela upoznali smo se s pojmom težišta i statičkih momenata površina. Ovdje ćemo ukratko ponoviti osnovne pojmove, definicije i izraze. Slika 4.1 prikazuje ravnu površinu s ucrtanim koordinatnim sustavom Ozy. Koordinate težišta y_T, z_T presjeka koji ima površinu A definirane su izrazima

$$y_T=\frac{1}{A}\int_A y\,\mathrm{d}A \qquad z_T=\frac{1}{A}\int_A z\,\mathrm{d}A, \tag{4.1}$$

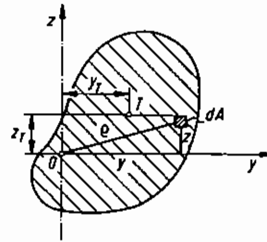
gdje je A površina presjeka.

Statički moment površine S_y oko osi y, prema slici 4.1, iznosi

$$S_y=\int_A z\,\mathrm{d}A. \tag{4.2a}$$

Na sličan način definira se i statički moment S_z oko osi z, tj.

$$S_z=\int_A y\,\mathrm{d}A. \tag{4.2b}$$



Slika 4.1. Definicija težišta i statičkih momenata površine ravnog presjeka

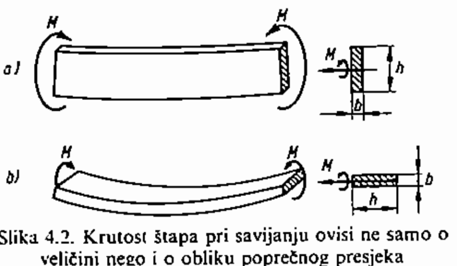
Usporedbom izraza (4.1) s izrazom (4.2) vidimo da je

$$S_y = z_T A = \int_A z \, dA$$
$$S_z = y_T A = \int_A y \, dA. \qquad (4.3)$$

Statički moment presjeka koji ima površinu A oko neke osi jednak je umnošku površine A i udaljenosti težišta od te osi. Ako os prolazi kroz težište površine, statički moment površine oko te osi jednak je nuli.

4.2. Momenti tromosti (momenti inercije)

Veličina naprezanja i krutost aksijalno opterećenih štapova ovise, između ostalog, i o površini poprečnog presjeka A. Kod savijanja i uvijanja štapova veličina i raspored naprezanja i njihova krutost ovise ne samo o veličini nego i o obliku poprečnog presjeka. Na slici 4.2 prikazana su dva jednaka štapa opterećena jednakim momentom savijanja. Oba štapa imaju jednaku površinu poprečnog presjeka $A = bh$. U prvom slučaju savijanje se vrši oko manje stranice (vektor momenta savijanja paralelan je s manjom stranicom), a u drugom slučaju oko veće stranice. Iz iskustva znamo da su deformacije i naprezanja u prvom slučaju mnogo manja. U ovom ćemo poglavlju proučavati neke geometrijske karakteristike ravnih presjeka koje imaju veliko značenje u teoriji uvijanja i savijanja štapova. Te su karakteristike: polarni, aksijalni i devijacijski moment tromosti, aksijalni i polarni moment otpora.



Slika 4.2. Krutost štapa pri savijanju ovisi ne samo o veličini nego i o obliku poprečnog presjeka

Polarni moment tromosti neke ravne površine definiran je izrazom

$$I_p = \int_A \rho^2 \, dA, \qquad (4.4)$$

gdje je I_p polarni moment tromosti za pol O (ishodište koordinatnog sustava). Ostale su oznake definirane na slici 4.1.

Aksijalni momenti tromosti odnose se uvijek na neku os. Otud im potječe ime. Aksijalni momenti tromosti za osi y i z dani su izrazom

$$I_y = \int_A z^2 \, dA$$
$$I_z = \int_A y^2 \, dA. \qquad (4.5)$$

Devijacijski ili centrifugalni momenti tromosti definiraju se uvijek za dvije osi. Devijacijski moment tromosti I_{yz} koji se odnosi na osi y i z definiran je izrazom

$$I_{yz} = I_{zy} = \int_A zy \, dA. \qquad (4.6)$$

Polarni moment tromosti može se dovesti u vezu s aksijalnim momentima tromosti. Naime, prema slici 4.1 jest $\rho^2 = y^2 + z^2$, pa je

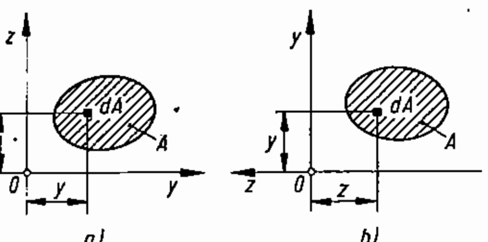
$$\int_A y^2 \, dA + \int_A z^2 \, dA = \int_A (z^2 + y^2) \, dA = \int_A \rho^2 \, dA, \qquad (4.7)$$

odnosno

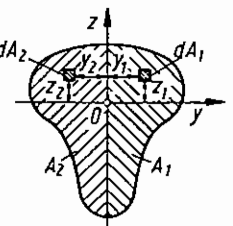
$$I_y + I_z = I_p. \qquad (4.8)$$

Prema tome je zbroj aksijalnih momenata tromosti za dvije međusobno okomite osi jednak polarnom momentu tromosti oko sjecišta osi i ne ovisi o njihovoj orijentaciji, tj. njihov je zbroj invarijanta pri rotaciji koordinatnog sustava.

Polarni i aksijalni momenti tromosti po definiciji su uvijek pozitivni. Devijacijski moment tromosti može biti pozitivan, negativan ili jednak nuli. Ako koordinatni sustav zakrenemo za 90°, promijenit će se predznak devijacijskog momenta. Prema slici 4.3a devijacijski moment tromosti očito je pozitivan jer su u čitavu području koordinate y i z pozitivne. Za položaj koordinatnog sustava, prema slici 4.3b, devijacijski je moment negativan jer je u čitavu području produkt yz negativan. Ako je makar jedna koordinata os ujedno os simetrije presjeka, devijacijski moment tromosti u odnosu na te osi jednak je nuli. To možemo dokazati pomoću slike 4.4. Postavimo



Slika 4.3. Kad se koordinatni sustav zakrene za $\pi/2$, I_{yz} mijenja predznak



Slika 4.4. Devijacijski moment tromosti simetričnih presjeka jednak je nuli

koordinatni sustav tako da os z bude os simetrije. Svakoj elementarnoj površini dA_1 koja se nalazi desno od osi z odgovara simetrično postavljena površina dA_2 lijevo od osi z. Elementarni devijacijski moment tromosti svakog takvog para iznosi

$$dI_{yz} = y_1 z_1 \, dA_1 + y_2 z_2 \, dA_2.$$

Budući da je $dA_2 = dA_1 = dA$, $y_2 = -y_1$ i $z_2 = z_1$ za sve simetrično postavljene elementarne površine, bit će

$$dI_{yz} = 0,$$

odnosno

$$I_{yz}=\int_A \mathrm{d}I_{yz}=0. \tag{4.9}$$

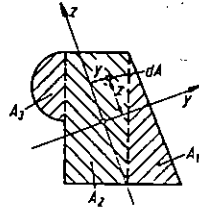
Prije nego pređemo izračunavanju momenata tromosti pojedinih jednostavnih presjeka, dokazat ćemo dva osnovna pravila o momentima tromosti koji će nam znatno olakšati njihovo izračunavanje.

Pravilo o zbrajanju momenata tromosti glasi: *Moment tromosti složenog presjeka u odnosu na neku os jednak je zbroju momenata tromosti pojedinih dijelova u odnosu na istu os.* Zamislimo presjek koji se sastoji od polovine kruga, pravokutnika i trokuta, kako je prikazano na slici 4.5. Prema definiciji je

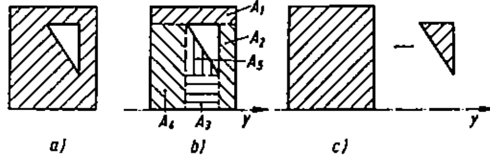
$$I_y=\int_A z^2\,\mathrm{d}A,$$

gdje je $A=A_1+A_2+A_3$ površina čitava presjeka, a A_1, A_2 i A_3 površine trokuta, pravokutnika, odnosno polovine kruga. Izraz za I_y možemo napisati u obliku

$$I_y=\int_{A_1} z^2\,\mathrm{d}A+\int_{A_2} z^2\,\mathrm{d}A+\int_{A_3} z^2\,\mathrm{d}A.$$



Slika 4.5. Moment tromosti složenog presjeka jednak je zbroju momenata tromosti pojedinih dijelova



Slika 4.6. Određivanje momenata tromosti oslabljenog presjeka

Integrali u gornjem izrazu predstavljaju momente tromosti trokuta, pravokutnika, odnosno polukruga, pa možemo pisati

$$I_y=I_{y1}+I_{y2}+I_{y3},$$

gdje su I_{y1}, I_{y2} i I_{y3} momenti tromosti sastavnih dijelova presjeka. Općenito, ako je presjek sastavljen od više dijelova, moment tromosti čitava presjeka oko neke osi jednak je zbroju momenata tromosti pojedinih njegovih dijelova oko iste osi, tj.

$$I_y=\sum_{i=1}^{n} I_{yi} \qquad I_{yz}=\sum_{i=1}^{n} I_{yzi} \qquad I_z=\sum_{i=1}^{n} I_{zi}. \tag{4.10}$$

Ako imamo oslabljen presjek, kao na slici 4.6a, često je prikladnije moment tromosti presjeka prikazati kao razliku momenata tromosti dvaju ili više dijelova umjesto kao zbroj. Rastavimo li presjek u pet dijelova, kao na slici 4.6b, bit će

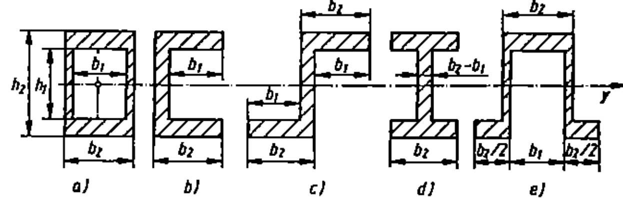
$$I_y=I_{y1}+I_{y2}+I_{y3}+I_{y4}+I_{y5}. \tag{e}$$

Prema slici 4.6c moment tromosti I_y iznosi

$$I_y=I_{y1}-I_{y2}, \tag{f}$$

gdje je I_{y1} moment tromosti punog pravokutnika, a I_{y2} moment tromosti trokuta.

Pravilo o paralelnom pomaku presjeka glasi: *Moment tromosti presjeka oko neke osi neće se promijeniti ako čitav presjek ili jedan njegov dio pomaknemo paralelno s tom osi.* Na slici 4.7 prikazan je niz profila jednake površine koji se

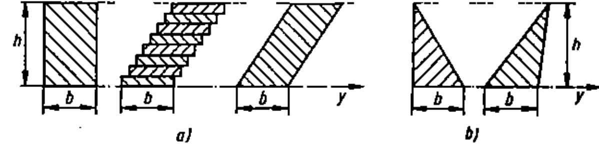


Slika 4.7. Svi presjeci na slici imaju jednak moment tromosti I_y

mogu dobiti iz profila a) pomicanjem pojedinih njegovih dijelova paralelno s osi y. Prema tome, momenti tromosti svih tih presjeka oko osi y bit će jednaki. U primjeru 4.1 vidjet ćemo da momenti tromosti I_y tih presjeka iznose

$$I_y=\frac{b_2h_2^3}{12}-\frac{b_1h_1^3}{12}. \tag{4.11}$$

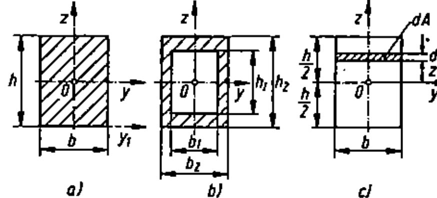
Prema tom istom pravilu sva tri lika sa slike 4.8a imaju jednak moment tromosti I_y. I oba trokuta na slici 4.8b imaju jednake momente tromosti oko osi y.



Slika 4.8. Svi presjeci na slici imaju jednak moment tromosti I_y

PRIMJER 4.1

Odrediti momente tromosti I_y, I_z, I_{yz} i I_p punog i šupljeg pravokutnog presjeka prema slici 4.9 za osi koje prolaze kroz težište presjeka.



Slika 4.9

Budući da su stranice paralelne s koordinatnim osima, bit će lakše odrediti aksijalne momente tromosti I_y i I_z, a zatim pomoću izraza (4.5) polarni moment tromosti. Budući da je širina b konstantna, možemo pisati

$$dA = b\,dz.$$

U tom je slučaju

$$I_y = \int_{(A)} z^2\,dA = b\int_{-h/2}^{h/2} z^2\,dz$$

odnosno

$$I_y = b\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{b}{3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^3 - \left(-\frac{h}{2}\right)^3\right]$$

$$I_y = \frac{b\,h^3}{12}. \qquad (4.12)$$

Na sličan način možemo dobiti

$$I_z = h\int_{-b/2}^{b/2} y^2\,dy = \frac{h\,b^3}{12}.$$

Osi y i z su osi simetrije, pa je devijacijski moment tromosti jednak nuli, tj. $I_{yz}=0$. Polarni moment tromosti oko ishodišta O, prema izrazu (4.5), jednak je zbroju aksijalnih momenata tromosti, pa možemo pisati

$$I_p = I_y + I_z = b\,h\frac{b^2+h^2}{12}. \qquad (4.13)$$

Moment tromosti šupljeg pravokutnika jednak je razlici momenata tromosti vanjskog i unutarnjeg pravokutnika, tj.

$$I_y = \frac{b_2 h_2^3}{12} - \frac{b_1 h_1^3}{12}$$
$$I_z = \frac{h_2 b_2^3}{12} - \frac{h_1 b_1^3}{12}. \qquad (4.14)$$

I u tom slučaju vrijedi $I_{yz}=0$, $I_p=I_y+I_z$. Napomenimo da se u nauci o čvrstoći *gotovo nikad ne upotrebljava polarni moment inercije neokruglih presjeka.*

PRIMJER 4.2

Na slici 4.10 prikazan je puni i šuplji kružni presjek. Odrediti polarni moment tromosti I_p i aksijalne momente tromosti I_y i I_z. Zadano: d, d_1, d_2.

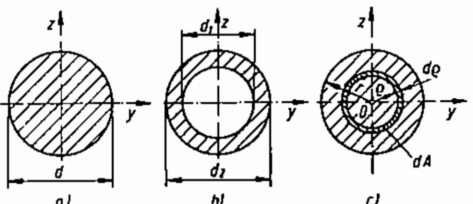
U tom je slučaju mnogo lakše odrediti polarni moment tromosti od aksijalnih. Polarne koordinate prikladnije su od pravokutnih, pa ćemo se njima i poslužiti. Kao element površine uzet ćemo prsten polumjera ρ i širine $d\rho$, tj.

$$dA = 2\pi\rho\,d\rho.$$

Polarni moment tromosti iznosi

$$I_p = \int_{(A)} \rho^2\,dA = 2\pi\int_0^r \rho^3\,d\rho = 2\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^r$$

$$I_p = \pi\frac{r^4}{2}.$$



Slika 4.10

Uzmemo li u obzir da je $r=d/2$, bit će

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}. \qquad (4.15)$$

Aksijalni momenti tromosti oko bilo koje osi kroz središte kruga međusobno su jednaki, pa možemo pisati

$$I_y = I_z.$$

Kako je

$$I_y + I_z = I_p,$$

bit će

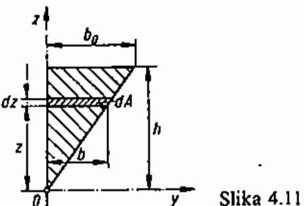
$$I_y = I_z = \frac{1}{2}I_p = \frac{\pi d^4}{64}. \qquad (4.16)$$

U slučaju šupljeg kružnog presjeka momenti tromosti iznose

$$I_p = \frac{\pi}{32}(d_2^4 - d_1^4)$$
$$I_y = I_z = \frac{\pi}{64}(d_2^4 - d_1^4). \qquad (4.17)$$

PRIMJER 4.3

Treba naći aksijalni moment tromosti I_y i devijacijski moment tromosti I_{yz} trokuta zadanog prema slici 4.11. Poznato je: b_0 i h.



Slika 4.11

Element površine u tom slučaju iznosi $dA = b\,dz$, gdje je b promjenljiva širina trokuta. Trokut širine b i visine z sličan je trokutu širine b_0 i visine h, pa je

$$b : b_0 = z : h,$$

odnosno

$$b = b_0 \frac{z}{h}. \tag{a}$$

U tom slučaju element površine iznosi

$$dA = b\,dz = \frac{b_0}{h} z\,dz. \tag{b}$$

Aksijalni moment tromosti trokuta oko osi y jest

$$I_y = \int_A z^2\,dA = \frac{b_0}{h}\int_0^h z^3\,dz = \frac{b_0}{h}\left[\frac{z^4}{4}\right]_0^h$$

$$I_y = \frac{b_0 h^3}{4}. \tag{4.18}$$

Koordinate težišta elementa površine dA su $\frac{b}{2}$ i z, pa devijacijski moment tromosti za osi y i z iznosi

$$I_{yz} = \int_A \frac{b}{2} z\,dA. \tag{c}$$

Uvrštavanjem izraza (a) i (b) u (c) dobit ćemo

$$I_{yz} = \frac{b_0^2}{2h^2}\int_0^h z^2\,dz = \frac{b_0^2}{2h^2}\left[\frac{z^4}{4}\right]_0^h$$

odnosno

$$I_{yz} = \frac{b_0^2 h^2}{8}. \tag{4.19}$$

4.3. Promjena momenata tromosti pri translaciji koordinatnog sustava

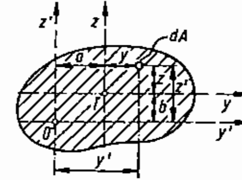
Prilikom rješavanja praktičkih problema obično se služimo gotovim rješenjima za momente tromosti, koja se za pravilne presjeke i standardne profile mogu naći u tablicama. Obično su u tom slučaju momenti tromosti dani za osi koje prolaze kroz težišta poprečnog presjeka.

Znamo li momente tromosti za jedan koordinatni sustav, možemo pomoću izraza za transformaciju odrediti momente tromosti za proizvoljno pomaknuti

koordinatni sustav. Znamo da svaki pomak koordinatnog sustava možemo rastaviti na translacije u smjeru osi y i osi z za iznose a i b i na rotaciju za kut φ. Razmotrit ćemo promjenu momenata tromosti posebno pri translaciji, a posebno pri rotaciji koordinatnog sustava.

Neka su nam poznati momenti tromosti I_y, I_z i I_{yz} s obzirom na koordinatne osi y i z koje prolaze kroz težište presjeka T. Izvest ćemo izraze za momente tromosti u odnosu na koordinatne osi y', z' koje su translatorno pomaknute, kako je prikazano na slici 4.12. Veza između starih i novih koordinata glasi

$$y' = a + y$$
$$z' = b + z. \tag{4.20}$$



Slika 4.12. Ilustracija Steinerova pravila

Prema definiciji momenti tromosti za translatirane osi y' i z' iznose:

$$I'_y = \int_A (z')^2\,dA$$
$$I'_z = \int_A (y')^2\,dA.$$
$$I'_{yz} = \int_A y'z'\,dA$$

Uvrstimo li (4.20) u gornje izraze, dobit ćemo:

$$I'_y = \int_A (b+z)^2\,dA = b^2\int_A dA + 2b\int_A z\,dA + \int_A z^2\,dA$$
$$I'_z = \int_A (a+y)^2\,dA = a^2\int_A dA + 2a\int_A y\,dA + \int_A y^2\,dA \tag{4.21}$$
$$I'_{yz} = \int_A (a+y)(b+z)\,dA = ab\int_A dA + a\int_A z\,dA + b\int_A y\,dA + \int_A yz\,dA.$$

Integrali $\int y\,dA = S_z$ i $\int z\,dA = S_y$ predstavljaju statičke momente presjeka u odnosu na osi kroz težište, pa su jednaki nuli. Također je $\int dA = A$ površina poprečnog presjeka i $\int z^2\,dA = I_y$, $\int y^2\,dA = I_z$ i $\int yz\,dA = I_{yz}$, tako da izrazi (4.21) prelaze u

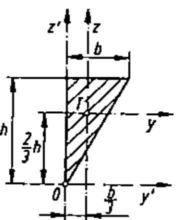
$$I'_y = b^2 A + I_y$$
$$I'_z = a^2 A + I_z \tag{4.22}$$
$$I'_{yz} = ab\,A + I_{yz}.$$

Izrazi (4.22) ponekad se nazivaju Steinerovo pravilo. Izračunamo li momente tromosti u odnosu na niz paralelnih osi, najmanju vrijednost imat će moment tromosti u odnosu na os kroz težište. Steinerovo pravilo aksijalnog momenta tromosti glasi: *Aksijalni moment tromosti oko osi koja ne prolazi kroz težište jednak je momentu tromosti oko paralelne težišne osi uvećanom za produkt površine presjeka i kvadrata udaljenosti težišta od zadane osi.*

Steinerovo pravilo devijacijskog momenta tromosti glasi: *Devijacijski moment u odnosu na zadani koordinatni sustav jednak je devijacijskom momentu tromosti u odnosu na paralelni težišni koordinatni sustav uvećanom za produkt površine presjeka i kordinata težišta u zadanom koordinatnom sustavu.*

PRIMJER 4.4

Odrediti težišne momente tromosti I_y, I_z i I_{yz} trokuta prema slici 4.13. Zadano: b i h.



Slika 4.13

Rješenje:

Iz primjera 4.3 poznat nam je aksijalni moment tromosti $I'_y = b\,h^3/4$ i devijacijski moment tromosti $I'_{yz} = b^2 h^2/8$. Primjenom Steinerova pravila odredit ćemo moment tromosti ako težišne osi y:

$$I'_y = I_y + A\left(\frac{2}{3}h\right)^2.$$

Odavde je

$$I_y = I'_y - A\left(\frac{2}{3}h\right)^2 = \frac{b\,h^3}{4} - \frac{1}{2}bh\left(\frac{2}{3}h\right)^2,$$

što nakon sređivanja daje

$$I_y = \frac{b\,h^3}{36}. \qquad (4.23)$$

Po analogiji možemo zaključiti da je

$$I_z = \frac{h\,b^3}{36}.$$

Težišni devijacijski moment prema Steinerovu pravilu glasi

$$I_{yz} = I'_{yz} - \frac{b}{3}\frac{2}{3}h\,A,$$

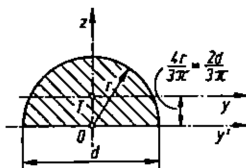
odnosno

$$I_{yz} = \frac{b^2h^2}{8} - \frac{2}{9}bh\frac{1}{2}bh$$

$$I_{yz} = \frac{b^2h^2}{72}. \qquad (4.24)$$

PRIMJER 4.5

Odrediti težišne momente tromosti polovine kruga prema slici 4.14.



Slika 4.14

Aksijalni moment tromosti I'_y polovine kruga jednak je polovini momenta tromosti punog kruga, pa prema izrazu (4.16) možemo pisati

$$I'_y = \frac{1}{2}\frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi d^4}{128}.$$

Udaljenost težišta polovine kruga od osi y' iznosi $2d/3\pi$, pa je

$$I_y = I'_y - A\left(\frac{2d}{3\pi}\right)^2 = \frac{\pi d^4}{128} - \frac{1}{2}\frac{\pi d^2}{4}\frac{4\,d^2}{9\,\pi^2},$$

što nakon sređivanja daje

$$I_y = 0{,}00686\,d^4. \qquad (4.25)$$

Očito je

$$I_z = \frac{1}{2}\frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi d^4}{128}. \qquad (4.26)$$

Devijacijski moment inercije I_{yz} jednak je nuli jer os z os simetrije presjeka.

4.4. Transformacija tenzora tromosti pri rotaciji koordinatnog sustava

Razmotrimo kako se mijenjaju momenti tromosti pri rotaciji koordinatnog sustava oko ishodišta. Momente tromosti koji se odnose na stari koordinatni sustav označit ćemo s I_y, I_z i I_{yz}, a momente tromosti koje se odnose na zarotirani

koordinatni sustav s $\bar{I}_y$, $\bar{I}_z$ i $\bar{I}_{yz}$. Neka os $\bar{y}$ čini s osi y kut φ. U tom će slučaju, prema slici 4.15, transformirani momenti tromosti biti

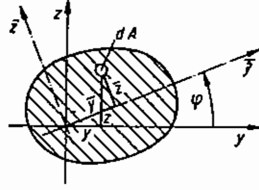
$$\bar{I}_y=\int_A \bar{z}^2\,dA$$
$$\bar{I}_z=\int_A \bar{y}^2\,dA \qquad (4.27)$$
$$\bar{I}_{yz}=\int_A \bar{y}\bar{z}\,dA.$$

Analogno izrazima (2.12) možemo napisati

$$\bar{y}=y\cos\varphi+z\sin\varphi$$
$$\bar{z}=-y\sin\varphi+z\cos\varphi. \qquad (4.28)$$

Uvrstimo li izraz (4.28) u (4.27), dobit ćemo

$$\bar{I}_y=\int_A(-y\sin\varphi+z\cos\varphi)^2\,dA$$
$$\bar{I}_z=\int_A(y\cos\varphi+z\sin\varphi)^2\,dA$$
$$\bar{I}_{yz}=\int_A(y\cos\varphi+z\sin\varphi)(-y\sin\varphi+z\cos\varphi)\,dA.$$



Slika 4.15. Transformacija tenzora tromosti

Nakon sređivanja ti izrazi prelaze u:

$$\bar{I}_y=\sin^2\varphi\int y^2\,dA+\cos^2\varphi\int z^2\,dA-2\sin\varphi\cos\varphi\int yz\,dA$$
$$\bar{I}_z=\cos^2\varphi\int y^2\,dA+\sin^2\varphi\int z^2\,dA+2\cos\varphi\sin\varphi\int yz\,dA$$
$$\bar{I}_{yz}=(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\int yz\,dA+\cos\varphi\sin\varphi\int z^2\,dA-\int y^2\,dA.$$

Uzmemo li u obzir da je prema izrazima (4.5) i (4.6)

$$\int y^2\,dA=I_z,\ \int z^2\,dA=I_y,\ \int yz\,dA=I_{yz},$$

dobit ćemo:

$$\bar{I}_y=I_y\cos^2\varphi+I_z\sin^2\varphi-2I_{yz}\cos\varphi\sin\varphi$$
$$\bar{I}_z=I_y\sin^2\varphi+I_z\cos^2\varphi+2I_{yz}\cos\varphi\sin\varphi \qquad (4.29)$$
$$\bar{I}_{yz}=(I_y-I_z)\cos\varphi\sin\varphi+I_{yz}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi).$$

Usporedimo li izraze (4.29) s izrazima (2.16) i (2.17), vidjet ćemo da među njima postoji potpuna analogija: naprezanju σ_x odgovara moment tromosti I_y, naprezanju σ_y moment tromosti I_z, a naprezanju τ_{xy} negativni devijacijski moment tromosti $-I_{yz}$. Naprezanjima $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$ i $\bar{\tau}_{xy}$ odgovaraju momenti tromosti $\bar{I}_y$, $\bar{I}_z$ i $-\bar{I}_{yz}$. Osima x, y odnosno $\bar{x}$, $\bar{y}$ odgovaraju osi y, z i $\bar{y}$, $\bar{z}$. Prema tome, svi zaključci i izrazi koje smo izveli za naprezanja mogu se primijeniti i na momente tromosti. Analogno, prema izrazu (2.19), možemo pisati:

$$\bar{I}_y=\frac{I_y+I_z}{2}+\frac{I_y-I_z}{2}\cos 2\varphi-I_{yz}\sin 2\varphi$$
$$\bar{I}_z=\frac{I_y+I_z}{2}-\frac{I_y-I_z}{2}\cos 2\varphi+I_{yz}\sin 2\varphi \qquad (4.30)$$
$$\bar{I}_{yz}=I_{zy}=\frac{I_y-I_z}{2}\sin 2\varphi+I_{yz}\cos 2\varphi.$$

Invarijante tenzora tromosti prema izrazu (2.20) glase:

$$\bar{I}_y+\bar{I}_z=I_y+I_z=I_1+I_2=\text{konst.}$$
$$\bar{I}_y\bar{I}_z-\bar{I}_{yz}^2=I_yI_z-I_{yz}^2. \qquad (4.31)$$

Glavni momenti tromosti dani su izrazima

$$I_{1,2}=\frac{I_y+I_z}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{I_y-I_z}{2}\right)^2+I_{yz}^2}. \qquad (4.32)$$

Izraz za kut φ_0 koji glavne osi tromosti čine s koordinatnim osima y i z analogno izrazu (2.22) glasi

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0=-\frac{I_{yz}}{(I_y-I_z)/2}. \qquad (4.33)$$

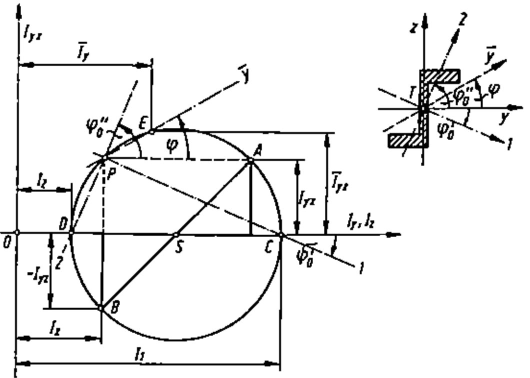
4.5. Mohrova kružnica tromosti

Mohrovoj kružnici naprezanja odgovara Mohrova kružnica tromosti. Na osi apscisa nanose se aksijalni momenti tromosti umjesto normalnih naprezanja, a na osi ordinata devijacijski momenti tromosti umjesto tangencijalnih naprezanja. Budući da su aksijalni momenti tromosti uvijek pozitivni, Mohrova kružnica tromosti nalazi se uvijek desno od osi ordinata. Slika 4.16 prikazuje Mohrovu kružnicu tromosti. Opisat ćemo postupak crtanja Mohrove kružnice tromosti:

1. Nacrtamo koordinatni sustav u kojem na osi apscisa nanosimo aksijalne momente tromosti, a na osi ordinata devijacijske momente tromosti.
2. U tom koordinatnom sustavu ucrtamo točke $A(I_y, I_{yz})$ i $B(I_z, -I_{yz})$.
3. Kroz točke A i B povlačimo kružnicu kojoj se središte nalazi na osi apscisa.

4. Kružnica siječe os apscisa u točkama C i D. Apscise tih točaka glavni su momenti tromosti I_1 i I_2.

5. Kroz točku A povlačimo paralelu s osi y, a kroz točku B paralelu s osi z. Sjecište tih paralela P nalazi se na kružnici i naziva se pol Mohrove kružnice tromosti.



Slika 4.16. Mohrova kružnica tromosti

6. Spojnica pola P i točke C definira os na koju se odnosi glavni moment tromosti I_1. Spojnica pola P s točkom D definira drugu glavnu os tromosti.

7. Želimo li naći momente tromosti oko neke osi $\bar{y}$, povlačimo iz pola P paralelu s osi $\bar{y}$. Ta paralela siječe kružnicu u točki E. Apscisa točke E predstavlja moment tromosti $\bar{I}_y$ a ordinata moment tromosti $\bar{I}_{yz}$.

Crtanje Mohrove kružnice ilustrirano je na slici 4.16.

4.6. Polumjer tromosti i elipsa tromosti

Polumjeri tromosti nekog presjeka površine A oko osi y i z definirani su izrazima

$$i_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}}, \qquad i_z=\sqrt{\frac{I_z}{A}}. \tag{4.34}$$

Na sličan način definirani su glavni polumjeri tromosti

$$i_1=\sqrt{\frac{I_1}{A}}, \qquad i_2=\sqrt{\frac{I_2}{A}}. \tag{4.35}$$

Pretpostavimo da su nam poznate glavne osi tromosti 1 i 2 i pripadni glavni momenti tromosti. Označimo glavne osi tromosti s y i z, tako da je $I_y=I_1$ i $I_z=I_2$, $I_{yz}=0$. Moment tromosti oko proizvoljno orijentirane osi y prema (4.17) iznosi

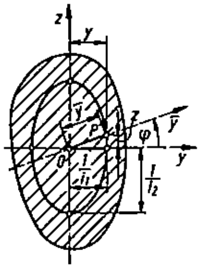
$$I_y=I_1\cos^2\varphi+I_2\sin^2\varphi. \tag{4.36}$$

Podijelimo li izraz (4.36) s A i uzmemo li u obzir (4.34) i (4.35), dobit ćemo

$$(i_y)^2=i_1^2\cos^2\varphi+i_2^2\sin^2\varphi. \tag{4.37}$$

Prema slici 4.17 jest

$$\cos\varphi=y/\bar{y}, \qquad \sin\varphi=z/\bar{y}. \tag{4.38}$$



Slika 4.17. Elipsa tromosti

Nakon uvrštavanja izraza (4.38) u (4.37) dobit ćemo

$$(i_y)^2=i_1^2\frac{y^2}{\bar{y}^2}+i_2^2\frac{z^2}{\bar{y}^2},$$

odnosno

$$\frac{y^2}{\left(\frac{i_y\bar{y}}{i_1}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(\frac{i_y\bar{y}}{i_2}\right)^2}=1. \tag{4.39}$$

Točku P možemo odabrati proizvoljno. Neka je

$$\bar{y}=\overline{OP}=1/\bar{i}_y.$$

U tom slučaju izraz (4.39) prelazi u

$$\frac{y^2}{(1/i_1)^2}+\frac{z^2}{(1/i_2)^2}=1 \tag{4.40}$$

i predstavlja elipsu tromosti s poluosima $1/i_1$ i $1/i_2$. Moment tromosti oko osi $\bar{y}$ u tom slučaju iznosi

$$\bar{I}_y=\bar{i}_y^2A=\frac{A}{\overline{OP}^2}. \tag{4.41}$$

Iako je konstrukcija elipse tromosti složenija od Mohrove kružnice, ponekad se upotrebljava jer zorno predočuje promjenu momenta inercije ovisno o kutu φ.

Do sada smo upoznali tri tenzora drugog reda: tenzor naprezanja, tenzor deformacije i tenzor tromosti. Razmotrili smo njihove transformacije u ravnini i

pokazali da među njima postoji potpuna analogija. Radi kompletnosti navodimo još jednom matrice sva tri tenzora:

$$[\sigma_{ij}]=\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{yx} & \sigma_y\end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon_{ij}]=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy}\\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy}\\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y\end{bmatrix} \tag{4.42}$$

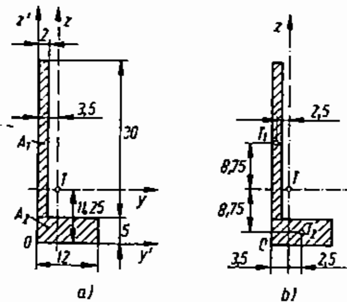
$$[I_{ij}]=\begin{bmatrix}I_{yy} & -I_{yz}\\ -I_{zy} & I_{zz}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_y & -I_{yz}\\ -I_{zy} & I_z\end{bmatrix}$$

U prvom stupcu dane su matrice s oznakama uobičajenim u tenzorskom računu, a u drugom stupcu matrice tenzora s oznakama uobičajenim u tehničkoj literaturi. Slično elipsi tromosti može se konstruirati elipsa naprezanja i elipsa deformacije.

PRIMJER 4.6

Za presjek na slici 4.18 treba:

- odrediti koordinate težišta y_T' i z_T',
- odrediti momente tromosti I_y, I_z, I_{yz},
- odrediti glavne osi tromosti ($\varphi_0=?$) i glavne momente tromosti,
- skicirati Mohrovu kružnicu tromosti.



Slika 4.18

Površinu presjeka podijelit ćemo na dva dijela: A_1 i A_2 i odrediti koordinate težišta tih dijelova u odnosu na pomoćni koordinatni sustav $Oy'z'$. Prema slici 4.18 bit će:

$$A_1=60\,\text{cm}^2 \qquad y_1'=1\,\text{cm} \qquad z_1'=20\,\text{cm}$$

$$A_2=60\,\text{cm}^2 \qquad y_2'=6\,\text{cm} \qquad z_2'=2{,}5\,\text{cm}.$$

Koordinate težišta cijelog presjeka iznose:

$$y_T'=\frac{A_1 y_1'+A_2 y_2'}{A_1+A_2}=3{,}5\,\text{cm}$$

$$z_T'=\frac{A_1 z_1'+A_2 z_2'}{A_1+A_2}=11{,}25\,\text{cm}.$$

Udaljenosti težišta T_1 i T_2 od težišnih koordinatnih osi naznačene su na slici 4.18b. Moment tromosti I_y čitava presjeka iznosi

$$I_y=\frac{2\cdot 30^3}{12}+60\cdot 8{,}75^2+\frac{12\cdot 5^3}{12}+60\cdot 8{,}75^2=13813\,\text{cm}^4.$$

Prvi i treći pribrojnik u tom izrazu predstavljaju vlastite težišne momente tromosti površine A_1, odnosno A_2, dok drugi i četvrti pribrojnik predstavljaju Steinerove dodatke za površine A_1 i A_2. Na sličan način možemo dobiti

$$I_z=\frac{30\cdot 2^3}{12}+60\cdot 2{,}5^2+\frac{5\cdot 12^3}{12}+60\cdot 2{,}5^2=1490\,\text{cm}^4.$$

Vlastiti devijacijski momenti površina A_1 i A_2 jednaki su nuli jer su to simetrični presjeci. Prema tome, devijacijski moment čitava presjeka sastoji se od Steinerovih dodataka, tj.

$$I_{yz}=60(-8{,}75)2{,}5+60(-2{,}5)8{,}75=-2625\,\text{cm}^4.$$

Prije nego pristupimo izračunavanju glavnih momenata tromosti izračunat ćemo poluzbroj i polurazliku

$$\frac{I_y+I_z}{4}=7652\,\text{cm}^4, \qquad \frac{I_y-I_z}{2}=6162\,\text{cm}^4.$$

Pomoću izraza (4.33) možemo odrediti kut φ_0 koji glavne osi tromosti čine s koordinatnim osima y i z, tj.

$$\text{tg}\,2\varphi_0=-\frac{I_{yz}}{(I_y-I_z)/2}=-\frac{-2625}{6162}=0{,}426.$$

Odavde je

$$2\varphi_0'=23{,}1° \quad \text{odnosno} \quad 2\varphi_0''=203{,}1°,$$

pa je

$$\varphi_0'=11{,}5° \quad \text{i} \quad \varphi_0''=101{,}5°.$$

Glavni momenti tromosti prema (4.32) iznose:

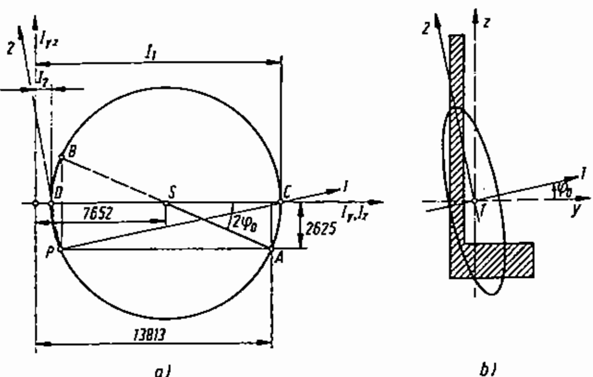
$$I_{1,2}=\frac{I_y+I_z}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{I_y-I_z}{2}\right)+I_{yz}^2}$$

$$I_{1,2}=7652\pm\sqrt{6162^2+(-2625)^2}=7652\pm 6700.$$

Odavde je

$$I_1 = 14352\,\text{cm}^4, \qquad I_2 = 952\,\text{cm}^4.$$

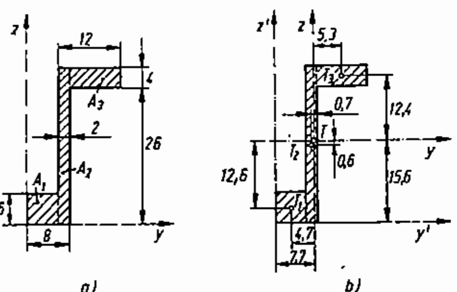
Os 1 čini kut manji od 45° s osi većeg momenta tromosti, tj. os 1 čini s osi y kut $\varphi_0 = 11{,}5°$. Na slici 4.19a prikazana je Mohrova kružnica tromosti, a na slici 4.19b odgovarajuća elipsa tromosti.



Slika 4.19. Mohrova kružnica tromosti u primjeru 4.6

PRIMJER 4.7

Naći glavne težišne momente tromosti presjeka prikazanog na slici 4.20a, te skicirati i kotirati elipsu tromosti.



Slika 4.20

Kao i u prethodnom primjeru možemo odrediti koordinate težišta koje iznose:

$$y'_T = 7{,}7\,\text{cm} \quad \text{i} \quad z'_T = 15{,}6\,\text{cm}.$$

Momenti tromosti za koordinatne osi y i z iznose:

$$I_y = \frac{6\cdot 6^3}{12} + 36\cdot 12{,}6^2 + \frac{2\cdot 30^3}{12} + 60\cdot 0{,}6^2 + \frac{10\cdot 4^3}{12} + 40\cdot 12{,}4^2 = 16549\,\text{cm}^4$$

$$I_z = \frac{6\cdot 6^3}{12} + 36\cdot 4{,}7^2 + \frac{30\cdot 2^3}{12} + 60\cdot 0{,}7^2 + \frac{4\cdot 10^3}{12} + 40\cdot 5{,}3^2 = 2410\,\text{cm}^4$$

$$I_{yz} = 36(-12{,}6)(-7{,}7) + 60(-0{,}6)(-0{,}7) + 40\cdot 5{,}3\cdot 12{,}4 = 6147\,\text{cm}^4.$$

Kut kojeg glavne osi tromosti čine s osy y izračunat ćemo pomoću (4.33), tj.

$$\text{tg}\,2\varphi_0 = -\frac{I_{yz}}{(I_y - I_z)/2} = -0{,}87.$$

Odavde je $2\varphi'_0 = -41°$ i $2\varphi''_0 = 139°$, odnosno

$$\varphi'_0 = -20{,}5° \quad \text{i} \quad \varphi''_0 = 69{,}5°.$$

Kako je $I_y > I_z$, os 1 čini s osi y kut manji od 45°, tj. kut $-20{,}5°$, što je prikazano na slici 4.21b. Glavne momente tromosti odredit ćemo pomoću izraza (4.32):

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} = 9479{,}5 \pm 9368{,}2$$

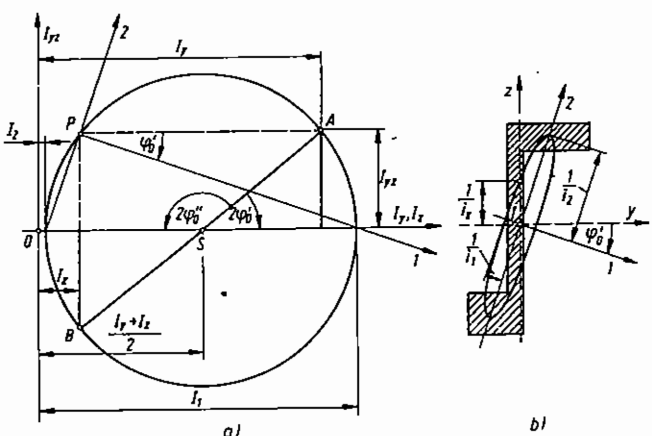
$$I_1 = 18847{,}7\,\text{cm}^4 \qquad I_2 = 111{,}3\,\text{cm}^4.$$

Polumjeri inercije jesu:

$$i_1 = \frac{I_1}{A} = \frac{18847{,}7}{136} = 11{,}77\,\text{cm} \qquad \frac{1}{i_1} = 8{,}5\,\text{m}$$

$$i_2 = \frac{I_2}{A} = 0{,}905\,\text{cm} \qquad \frac{1}{i_2} = 110{,}5\,\text{m}.$$

Mohrova kružnica i elipsa tromosti prikazane su na slici 4.21a i b.



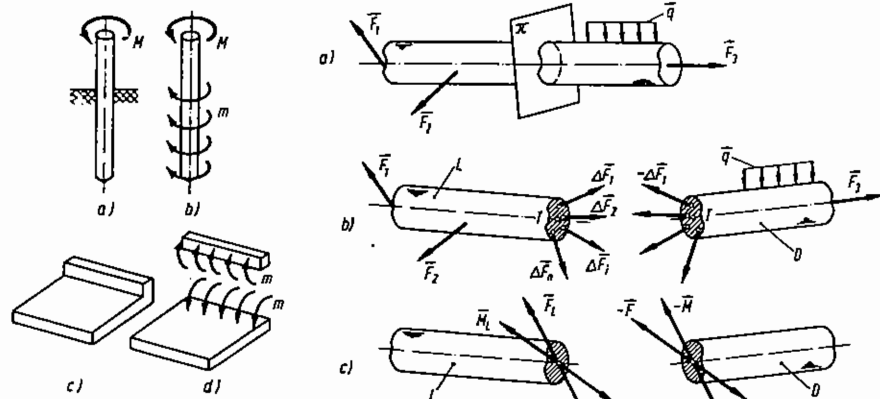
Slika 4.21. Mohrova kružnica tromosti i elipsa tromosti u primjeru 4.7

5. KOMPONENTE UNUTRAŠNJIH SILA U PROIZVOLJNO OPTEREĆENOM ŠTAPU

5.1. Definicija komponenata unutrašnjih sila

U ovom poglavlju upoznat ćemo se s postupcima određivanja komponenata unutrašnjih sila u proizvoljno opterećenim štapovima koji su vezani na statički određen način. Određivanje unutrašnjih sila u statički neodređenim štapnim sistemima objasnit ćemo kasnije. Akò je štap statički određen, možemo pomoću uvjeta ravnoteže odrediti sve nepoznate reakcije veza, pa nam je vanjsko opterećenje štapa poznato. Sa stanovišta određivanja unutrašnjih sila potpuno je svejedno da li je vanjsko opterećenje aktivno ili potječe od reakcije veze. Vanjsko opterećenje mogu biti i sile inercije; međutim, one tada moraju biti u kinetostatičkoj ravnoteži s ostalim vanjskim silama. Opterećenje štapa možemo podijeliti na koncentrirane sile i spregove i kontinuirane sile i spregove. Na slici 5.1 prikazana su dva slučaja kod kojih se mogu pojaviti kontinuirano raspodijeljeni spregovi.

Radi lakše analize unutarnjih sila uvodimo pravokutni koordinatni sustav $Oxyz$, kako je prikazano na slici 5.3. Os x redovno biramo tako da se podudara s uzdužnom osi štapa, dok su preostale dvije osi okomite na os štapa. Na slici 5.2



Slika 5.1. Ilustracija kontinuiranih momenata

Slika 5.2. Redukcija unutrašnjih sila na težište poprečnog presjeka štapa

prikazan je proizvoljno opterećen štap. Radi što jednostavnije analize pretpostavit ćemo za početak da je štap u ravnoteži, tj.

$$\vec{F}_R=0 \quad \text{i} \quad \vec{M}_R=0, \tag{5.1}$$

gdje su $\vec{F}_R$ i $\vec{M}_R$ rezultanta i rezultirajući moment svih vanjskih sila. Pod *poprečnim presjekom* štapa razumijevat ćemo presjek štapa ravninom koja je okomita na uzdužnu os. Odaberimo poprečni presjek na proizvoljnu mjestu. Dobit ćemo dva dijela: lijevi L i desni D. Kako je čitav štap u ravnoteži, bit će i dijelovi L i D također u ravnoteži. Međutim, vanjske sile koje djeluju na dijelu L ili D ne moraju biti u ravnoteži, pa zaključujemo da u poprečnom presjeku moraju postojati unutrašnje sile među česticama materijala koje će zajedno s vanjskim silama držati dijelove L i D u ravnoteži. Te smo sile na slici 5.2b označili s $\Delta\vec{F}_1$, $\Delta\vec{F}_2 \ldots \Delta\vec{F}_i \ldots \Delta\vec{F}_n$. Sile $\Delta\vec{F}_i$ mijenjaju se od točke do točke po smjeru i veličini. Pojedinačno određivanje tih sila vrlo je složen problem i predstavlja jedan od glavnih zadataka nauke o čvrstoći. Raspored tih sila ne možemo odrediti metodama statike krutih tijela, ali u slučaju statički određenih zadataka možemo odrediti rezultantu i rezultirajući moment unutrašnjih sila. Reduciramo li unutrašnje sile, koje djeluju na lijevi dio, na težište T poprečnog presjeka, dobit ćemo rezultantu $\vec{F}$ i rezultirajući moment $\vec{M}$.

Po zakonu akcije i reakcije rezultanta unutrašnjih sila, koje djeluju na desni dio, jednaka je $-\vec{F}$ i $-\vec{M}$. Budući da je čitav štap u ravnoteži, bit će

$$\begin{aligned}\vec{F}_R&=\vec{F}_L+\vec{F}_D=0\\ \vec{M}_R&=\vec{M}_L+\vec{M}_D=0,\end{aligned} \tag{5.2}$$

gdje su $\vec{F}_L$, $\vec{M}_L$ i $\vec{F}_D$, $\vec{M}_D$ rezultanta i rezultirajući moment vanjskih sila lijevog odnosno desnog dijela reducirani na težište poprečnog presjeka. Na temelju (5.2) možemo pisati

$$\vec{F}_L=-\vec{F}_D,\ \vec{M}_L=-\vec{M}_D,$$

odnosno

$$F_L=F_D,\ M_L=M_D, \tag{5.3}$$

gdje su F_L, F_D, M_L i M_D apsolutne vrijednosti. Kako je lijevi dio u ravnoteži pod djelovanjem vanjskih i unutrašnjih sila, zaključujemo da je

$$\begin{aligned}\vec{F}_L+\vec{F}&=0\\ \vec{M}_L+\vec{M}&=0.\end{aligned} \tag{5.4}$$

Pomoću izraza (5.4) i (5.2) možemo dobiti:

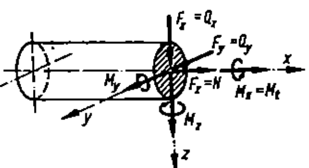
$$\begin{aligned}\vec{F}&=-\vec{F}_L=\vec{F}_D\\ \vec{M}&=-\vec{M}_L=\vec{M}_D,\end{aligned} \tag{5.5}$$

odnosno

$$\begin{aligned}F&=F_L=F_D\\ M&=M_L=M_D,\end{aligned} \tag{5.6}$$

što se može riječima kazati ovako: Rezultanta i rezultirajući moment unutrašnjih sila u nekom presjeku nosača jednaki su po *apsolutnoj vrijednosti* rezultanti i rezultirajućem momentu vanjskih sila koje djeluju bilo lijevo bilo desno od presjeka. Prema izrazu (5.5) unutrašnje sile $\Delta\vec{F}_i$, koje djeluju na lijevi dio, statički su ekvivalentne (tj. imaju jednaku rezultantu i rezultirajući moment) vanjskim silama, koje djeluju na desni dio.

Rezultantu i rezultirajući moment unutrašnjih sila rastavljamo na komponente F_x, F_y, F_z, M_x, M_y i M_z, prema slici 5.3. Te ćemo komponente ubuduće kraće zvati *komponente unutrašnjih sila*. Uobičajeno je da se komponente unutrašnjih sila označavaju posebnim oznakama.



Slika 5.3. Šest komponenata unutrašnjih sila

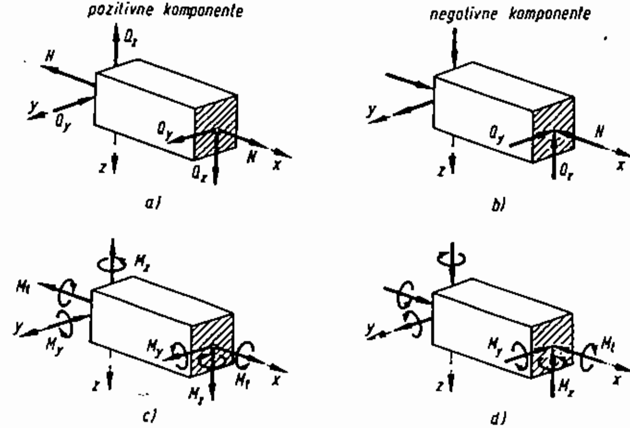
Komponenta F_x, koja djeluje okomito na poprečni presjek, označava se s $N=F_x$ i naziva *normalna ili uzdužna sila*. Ta komponenta izaziva rastezanje odnosno sabijanje štapa. Sile F_y i F_z stoje okomito (poprečno) na os štapa, pa se nazivaju *poprečne sile* i označavaju s $Q_y=F_y$, $Q_z=F_z$. Komponenta momenta M_x izaziva uvijanje ili torziju, a označava se s M_t i zove se *moment uvijanja* ili *moment torzije*. Komponente M_y i M_z izazivaju savijanje (fleksiju) i zovu se *momenti savijanja*.

Komponente unutrašnjih sila prikazujemo pomoću strelica. Kod sila je strelica usmjerena prema djelovanju sile, a kod momenata po pravilu desnog vijka. Komponenta unutrašnje sile je pozitivna ako je strelica kojom je prikazana na pozitivnom presjeku usmjerena pozitivno a na negativnom presjeku negativno. Ako je na pozitivnom presjeku strelica usmjerena negativno, odnosno na negativnom presjeku pozitivno, komponenta unutrašnje sile je negativna. To pravilo ilustrirano je na slici 5.4 i analogno je pravilu o određivanju predznaka komponenata naprezanja.

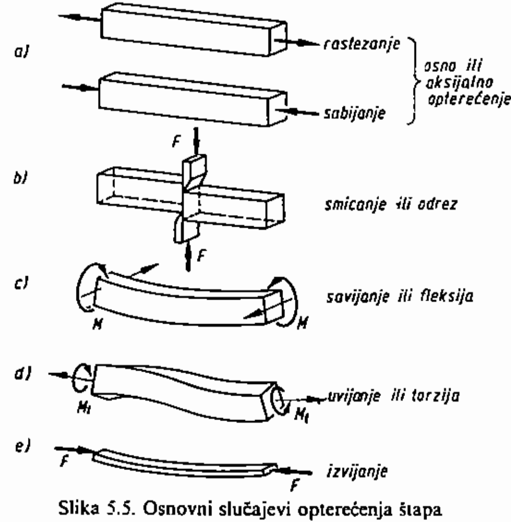
Analiza naprezanja i deformacija u proizvoljno opterećenom štapu dosta je složena, pa se posebno analiziraju pojedine vrste opterećenja štapa. Na slici 5.5 ilustrirane su osnovne vrste opterećenja štapa: osno opterećenje, smicanje, uvijanje i savijanje.

Štap je aksijalno opterećen ako se unutrašnje sile u poprečnom presjeku svode samo na normalnu komponentu N, dok su sve ostale komponente unutrašnjih sila jednake nuli. Ako je $N>0$, štap je opterećen na rastezanje ili vlak, a ako je $N<0$, štap je opterećen na sabijanje ili tlak. Aksijalno opterećenje štapa ilustrirano je na

slici 5.4a. Štap je opterećen na smicanje ako je poprečna sila različita od nule, a sve ostale komponente unutrašnjih sila jednake nuli (sl. 5.4b). Na slici 5.4c prikazan je štap koji je opterećen na savijanje. U tom je slučaju samo moment savijanja različit od nule. Ako je samo moment uvijanja različit od nule, kako je prikazano na slici 5.4a, štap je opterećen na uvijanje. Često se u osnovne slučajeve opterećenja štapa ubraja i izvijanje. Ovdje se radi, zapravo, o problemu gubitka elastične stabilnosti.



Slika 5.4. Definicija predznaka komponenata unutrašnjih sila



Slika 5.5. Osnovni slučajevi opterećenja štapa

Naime, kod kratkog štapa nema opasnosti od iskrivljavanja uzdužne osi pod djelovanjem tlačnog opterećenja. Ako je štap vitak (tj. dug i tanak), pod djelovanjem tlačnih sila može doći do bočnog izvijanja. Vlačne sile ne mogu izazvati izvijanje.

5.2. Diferencijalne jednadžbe ravnoteže elementa štapa

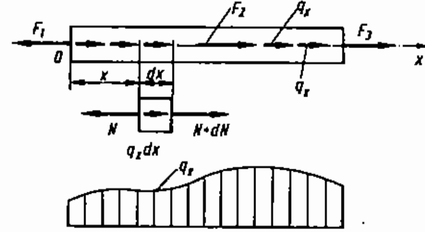
Zamislimo štap koji je proizvoljno opterećen koncentriranim silama i momentima te kontinuirano raspoređenim silama $q(x)$ i momentima $m(x)$. Komponente unutrašnjih sila bit će u tom slučaju također funkcije koordinate x, tj.

$$N = N(x), \qquad Q_y = Q_y(x), \qquad Q_z = Q_z(x)$$

$$M_t = M_t(x), \qquad M_y = M_y(x), \qquad M_z = M_z(x).$$

Zakon promjene komponenata unutrašnjih sila ovisi o načinu promjene opterećenja. Tu ovisnost uspostavit ćemo pomoću uvjeta ravnoteže elementa. Iako bismo mogli istodobno promatrati općenito opterećen štap, razmatrat ćemo odvojeno aksijalno opterećenje, uvijanje i savijanje. Pri postavljanju diferencijalnih jednadžbi ravnoteže birat ćemo elemente tako da na njih ne djeluju koncentrirana opterećenja, pa će i izrazi vrijediti samo za područja u kojima ne djeluje koncentrirano opterećenje, tj. od jednog koncentriranog opterećenja do slijedećeg.

Aksijalno opterećenje. Da bi se u štapu pojavila samo uzdužna sila N, štap može biti opterećen jedino koncentriranim silama koje su paralelne s osi x i kontinuiranim opterećenjem q_x, kako je prikazano na slici 5.6. Dijagram ispod štapa pokazuje zakon promjene kontinuiranog opterećenja $q_x = f(x)$.



Slika 5.6. Ravnoteža elementa aksijalno opterećenog štapa

U presjeku x označimo normalnu silu s N. Kad se x promijeni za dx, normalna sila promijenit će se za iznos dN i na mjestu $x+\mathrm{d}x$ iznositi $N+\mathrm{d}N$. Razumije se da prirast dN može biti pozitivan, negativan ili jednak nuli, ovisno o tome da li uzdužna sila N raste, opada ili je konstantna duž osi x. Prema tome, na element duljine dx djeluju unutrašnje sile N i $N+\mathrm{d}N$ i vanjsko opterećenje $q_x\mathrm{d}x$. Opterećenje q_x pomnožili smo s duljinom elementa dx jer se ono odnosi na jedinicu duljine. Uvjet ravnoteže tog elementa glasi

$$\Sigma F_x = -N + q_x\,\mathrm{d}x + (N + \mathrm{d}N) = 0,$$

što nakon sređivanja prelazi u

$$\mathrm{d}N = -q_x\,\mathrm{d}x,$$

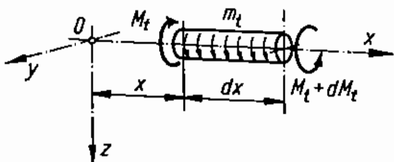
odnosno u

$$\frac{dN}{dx} = -q_x. \tag{5.7}$$

Izraz (5.7) pokazuje da je derivacija uzdužne sile N po x negativna ako je q_x pozitivno. Prema tome, na dijelu štapa na kome je q_x pozitivno usmjereno uzdužna sila N se smanjuje.

Uvijanje. Štap je opterećen na uvijanje ako su sve komponente unutrašnjih sila jednake nuli osim momenta uvijanja M_t. To će biti ispunjeno ako je štap opterećen samo kontinuiranim momentima m_t i koncentriranim momentima M_x. Element štapa prikazan je na slici 5.7. Uvjet ravnoteže tog elementa glasi

$$\Sigma M_x = -M_t + m_t\,dx + M_t + dM_t = 0.$$

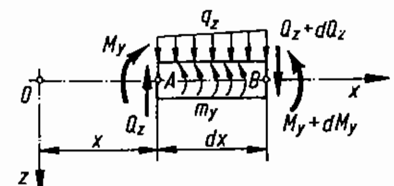


Slika 5.7. Ravnoteža elementa štapa opterećenog na uvijanje

Sređivanjem tog izraza dobit ćemo

$$\frac{dM_t}{dx} = -m_t. \tag{5.8}$$

Poprečno savijanje štapa u ravnini Oxz. Kod čistog savijanja ili savijanja spregovima jedino je moment savijanja različit od nule, dok su sve ostale komponente unutrašnjih sila jednake nuli. Ako se pored momenta savijanja javlja i poprečna sila, savijanje zovemo poprečnim savijanjem, odnosno savijanje silama. Poprečno savijanje nastaje ako je štap opterećen kontinuiranim opterećenjem q_z i kontinuiranim momentima m_y. Slika 5.8 prikazuje element štapa koji se savija u ravnini Oxz.



Slika 5.8. Ravnoteža elementa štapa opterećenog na savijanje u ravnini Oxz

Od šest uvjeta ravnoteže četiri su automatski zadovoljena, a preostala dva glase

$$\Sigma F_z = -Q_z + q_z\,dx + Q_z + dQ_z = 0$$

$$\Sigma M_B = -M_y - Q_z\,dx + q_z\,dx\frac{dx}{2} + M_y + dM_y + m_y\,dx = 0.$$

Nakon sređivanja prvog uvjeta dobit ćemo

$$\frac{dQ_z}{dx} = -q_z. \tag{5.9}$$

Pokratimo li M_y u drugom izrazu, dobivamo

$$dM_y = Q_z\,dx - \frac{1}{2}q_z\,dx^2 - m_y\,dx.$$

Ovdje imamo tri veličine prvog reda i jednu veličinu drugog reda: $q_z\,dx^2/2$, koju možemo ispustiti. Ako sada cijeli izraz podijelimo s dx, dobit ćemo

$$\frac{dM_y}{dx} = Q_z - m_y. \tag{5.10}$$

Derivirajmo taj izraz po x, pa ćemo dobiti

$$\frac{d^2M_y}{dx^2} = \frac{dQ_z}{dx} - \frac{dm_y}{dx}.$$

Ako u taj izraz uvrstimo (2.9), dobit ćemo

$$\frac{d^2M_y}{dx^2} = -q_z - \frac{dm_y}{dx}. \tag{5.11}$$

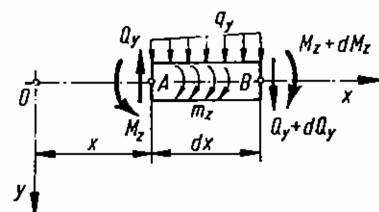
Kontinuirano raspodijeljeni momenti m_y i m_z rijetko se javljaju u praksi. Ako u izrazima (5.10) i (5.11) uvrstimo $m_y = 0$, dobit ćemo

$$\frac{dM_y}{dx} = Q_z \tag{5.10a}$$

i

$$\frac{d^2M_y}{dx^2} = -q_z. \tag{5.11a}$$

Poprečno savijanje štapa u ravnini Oxy. Element štapa koji je opterećen na savijanje u ravnini Oxy prikazan je na slici 5.9. Osim vanjskim kontinuiranim opterećenjem q_y i kontinuiranim spregovima m_z element je u presjeku x opterećen poprečnom silom Q_y i momentom savijanja M_z, a u presjeku $x + dx$ poprečnom silom $Q_y + dQ_y$ i



Slika 5.9. Ravnoteža elementa štapa opterećenog na savijanje u ravnini Oxy

momentom savijanja $M_z + dM_z$. Prema dogovoru o predznaku komponenata unutrašnjih sila sve su ucrtane veličine pozitivne.

Uvjeti ravnoteže tog elementa glase:

$$\Sigma F_y = -Q_y + q_y\,dx + Q_y + dQ_y = 0$$

$$\Sigma M_B = -M_z + Q_y\,dx - \frac{1}{2}q_y\,dx^2 + M_z + dM_z + m_z\,dx = 0.$$

Nakon sređivanja tih jednadžbi, slično kao i u prethodnom slučaju, dobit ćemo:

$$\frac{dQ_y}{dx} = -q_y \qquad (5.12)$$

$$\frac{dM_z}{dx} = -Q_y - m_z \qquad (5.13)$$

$$\frac{d^2M_z}{dx^2} = q_y - \frac{dm_z}{dx}. \qquad (5.14)$$

Kad je $m_z = 0$, gornji izrazi prelaze u

$$\frac{dM_z}{dx} = Q_y \qquad (5.13a)$$

$$\frac{d^2M_z}{dx^2} = q_y. \qquad (5.14a)$$

5.3. Upute za crtanje dijagrama momenata savijanja i poprečnih sila

Dijagrami momenata savijanja i poprečnih sila su zapravo grafovi funkcija $M_y(x)$ i $Q_z(x)$ odnosno $M_z(x)$. Ako se ne radi o istovremenom savijanju u dvije ravnine (koso savijanje), koordinatni sustav birat ćemo tako da se savijanje vrši u ravnini Oxz. Razmatrat ćemo slučaj kad je $m_y = 0$. Tada vrijede izrazi (5.10a) i (5.11a) koji glase:

$$\frac{dM_y}{dx} = Q_z \quad \text{i} \quad \frac{dQ_z}{dx} = -q_z.$$

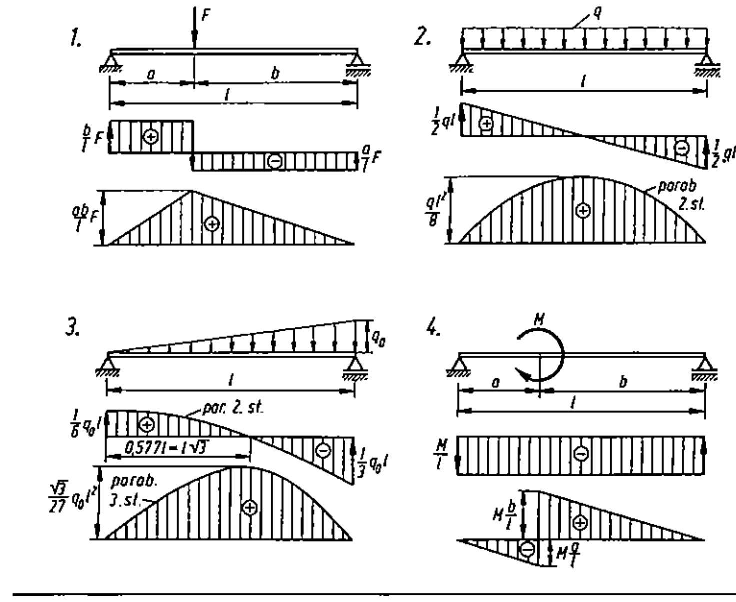
Uzimajući u obzir odnose između funkcije i njene derivacije, možemo za dijagrame unutrašnjih sila postaviti ova pravila:

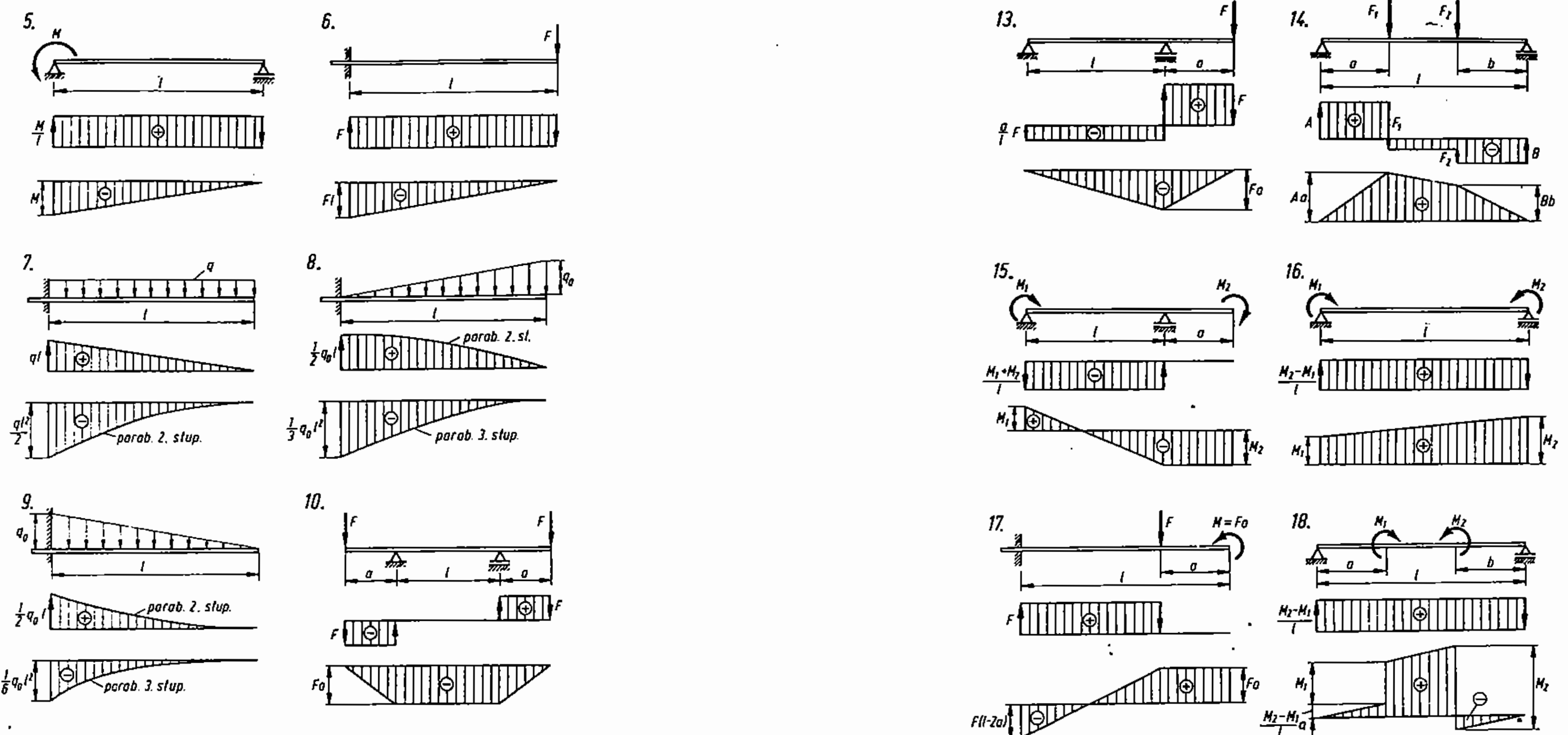
1. Ako na dijelu nosača nema kontinuiranog opterećenja, poprečna je sila konstantna, a moment savijanja mijenja se po zakonu pravca.
2. Ako je dio nosača opterećen jednolikim opterećenjem q_z, poprečna sila mijenja se po zakonu pravca, a moment savijanja po zakonu kvadratne parabole.
3. Ako je kontinuirano opterećenje raspoređeno po zakonu parabole n-tog stupnja, poprečna sila raspoređena je po zakonu parabole $n+1$ stupnja, a moment savijanja po zakonu parabole $n+2$ stupnja.
4. U presjeku u kome poprečna sila mijenja predznak moment savijanja ima ekstremnu vrijednost (minimum ili maksimum).
5. U presjeku u kome djeluje koncentrirana sila okomito na os štapa, dijagram poprečnih sila ima skok za iznos te sile, a dijagram momenata savijanja lom.
6. Ako u nekom presjeku djeluje koncentrirani moment, dijagram poprečnih sila ostaje kontinuiran i gladak, dok dijagram momenata savijanja ima skok za iznos tog momenta.
7. U dijelu u kojem je opterećenje q_z pozitivno, dijagram poprečnih sila opada, a ako je q_z negativno, dijagram poprečnih sila raste.
8. Na dijelu nosača za koji je poprečna sila pozitivna dijagram momenata savijanja raste.
9. Na dijelu nosača na kome ne djeluje koncentrirani moment površina ispod Q-dijagrama, jednaka je prirastu ordinate M-dijagrama.

U tablici 5.1 prikazano je 18 nosača različito opterećenih, s pripadnim dijagramima poprečnih sila i momenata savijanja. Pri proračunima u nauci o čvrstoći ti se slučajevi često pojavljuju pa ih je potrebno dobro proučiti. Sva navedena pravila ilustrirana su u toj tablici.

Tablica 5.1

Primjeri različito opterećenih nosača





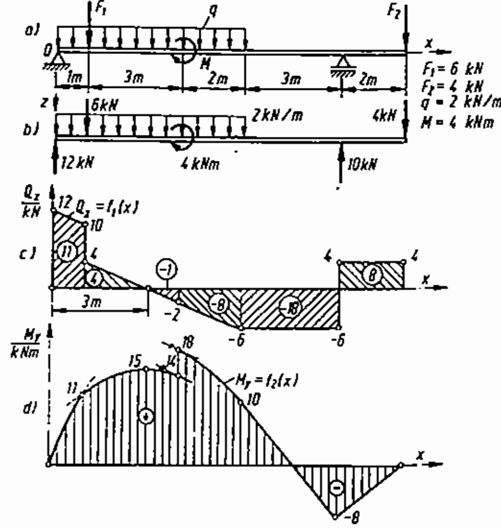
U primjerima 5.1 i 5.2 zadani su nosači s pripadnim opterećenjem. Prikazani su nosači oslobođeni veza kao i pripadni Q i M-dijagrami. Nije opisan postupak određivanja reakcija i dijagrama poprečnih sila i momenata savijanja jer je poznat iz statike krutih tijela. Ovdje ćemo samo prokomentirati dijagrame.

PRIMJER 5.1

Na slici 5.10a prikazana je greda s prepustom koja je opterećena kontinuiranim opterećenjem q_z, koncentriranim silama F_1 i F_2 i koncentriranim spregom M. Na slici 5.10b prikazana je greda oslobođena veza s ucrtanim reakcijama u osloncima, a

na slici 5.10c i d nacrtani su pripadni dijagrami poprečnih sila, odnosno momenata savijanja. Ishodište koordinatnog sustava nalazi se u lijevom osloncu.

U području $0 \leq x \leq 6$ m kontinuirano opterećenje q_z je konstantno, pa u dijagramu poprečnih sila imamo pravac s negativnim nagibom jer je $q_z > 0$ (pravilo 7). Dijagram momenata savijanja jest parabola 2. reda (pravilo 2). U točki $x = 1$ m djeluje koncentrirana sila $F_1 = 6$ kN, pa dijagram poprečnih sila ima skok za isti iznos, a dijagram momenata savijanja ima lom tangente (pravilo 5). U presjeku $x = 4$ m djeluje koncentrirani spreg. Na tom mjestu dijagram poprečnih sila ostaje nepromijenjen, a dijagram momenata savijanja ima skok od 14 kNm na 18 kNm, tj. upravo za iznos sprega $M = 4$ kNm (pravilo 6). U presjeku $x = 3$ m poprečna sila Q_z mijenja predznak pa M-dijagram ima ekstrem $M_y = 15$ kNm (pravilo 4).



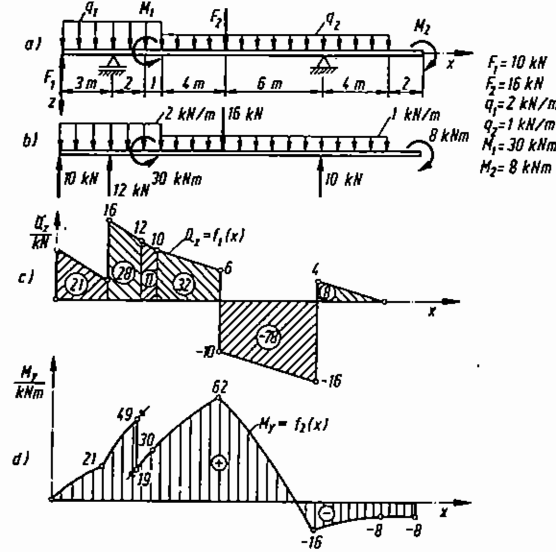
Slika 5.10. Dijagrami unutrašnjih sila

U području $6 \leq x \leq 9$ m je $q = 0$, pa je dijagram poprečne sile horizontalan pravac, a M-dijagram pravac konstantnog nagiba (pravilo 1). Isto vrijedi i za područje $9 \leq x \leq 11$ m. U točki $x = 9$ m poprečna je sila jednaka nuli, pa moment savijanja ima ekstremnu vrijednost.

Prema pravilu 9 prirast M-dijagrama na dijelu nosača jednak je površini ispod Q-dijagrama na tom dijelu nosača. Od točke 0 do 1 površina ispod Q-dijagrama jest $1 \cdot (12 + 10)/2 = 11$ kNm, dok je M-dijagram porastao od nule na 11 kNm. U području $1 \leq x \leq 3$ m površina ispod Q-dijagrama iznosi 4 kNm, pa je moment savijanja porastao za isti iznos: od 11 na 15 kNm. U idućem intervalu površina je -1 kNm, pa je moment savijanja opao na 14 kNm. Na slici 5.10c u kružićima su naznačene površine ispod Q-dijagrama. M-dijagram se u promatranim intervalima mijenja za iste iznose.

PRIMJER 5.2

Na slici 5.11 prikazana je ista greda opterećena i oslobođena veza te pripadni dijagrami poprečne sile i momenta savijanja. Mogli bismo i ovdje provesti analizu dijagrama slično kao u prethodnom primjeru. Bit će dovoljno da naglasimo najvažnije karakteristike. U točkama $x = 10$ m i $x = 16$ m poprečna sila mijenja predznak pa M-dijagram ima ekstreme $+62$ kNm i -16 kNm. U točki $x = 5$ m djeluje koncentrirani spreg, pa M-dijagram ima skok. Neposredno lijevo i desno od te točke možemo smatrati da je poprečna sila jednaka, pa je nagib tangente na M-dijagram u oba slučaja isti. Nagib Q-dijagrama konstantan je u područjima $0 \leq x \leq 6$ i $6 \leq x \leq 20$ jer je u tim područjima $q_z =$ konst. Kako je $q_1 > q_2$, nagib u prvom području veći je od nagiba u drugom području.



Slika 5.11. Dijagrami unutrašnjih sila

5.4. Veza između komponenata unutrašnjih sila i komponenata naprezanja

Na slici 5.12 prikazan je presjek štapa. Na elementu površine dA ucrtane su komponente naprezanja. U težištu presjeka ucrtana je normalna sila N i poprečne sile Q_y i Q_z. Također je prikazan moment uvijanja M_t i momenti savijanja M_y i M_z. Element normalne sile N na površini dA iznosi

$$dN = \sigma_x \, dA.$$

Ukupna normalna sila N dobit će se integriranjem gornjeg izraza po čitavu presjeku A, tj.

$$N = \int_A \sigma_x \, dA. \qquad (5.15)$$

Slično možemo dobiti da je

$$Q_y = \int_A \tau_{xy} \, dA \tag{5.16}$$

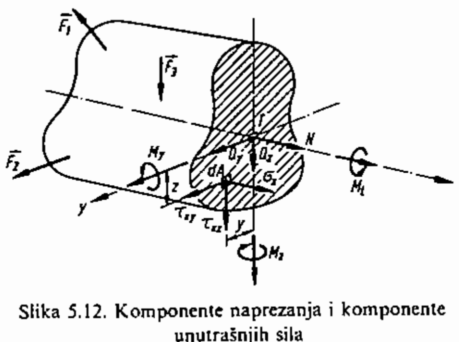
$$Q_z = \int_A \tau_{xz} \, dA. \tag{5.17}$$

Element momenta dM_y oko osi y iznosi

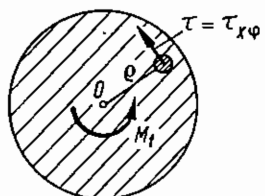
$$dM_y = \underbrace{\sigma_x dA}_{\text{sila}} \underbrace{z}_{\text{krak}},$$

gdje je $\sigma_x dA$ elementarna sila, a z njen krak oko osi y. Elementarna sila τ_{xy} pojavljuje se u gornjem izrazu jer je paralelna s osi y, tj. nema momenta oko Elementarna sila $\tau_{xz} dA$ prolazi kroz os y, pa također nema momenta oko c Nakon integriranja taj izraz prelazi u

$$M_y = \int_A \sigma_x z \, dA.$$



Slika 5.12. Komponente naprezanja i komponente unutrašnjih sila



Slika 5.13. Veza posmičnog naprezanja i momenta torzije

Slično možemo dobiti da je

$$M_z = -\int_A \sigma_x y \, dA. \tag{5.19}$$

Ovdje je pred znakom integrala negativan predznak jer je smjer djelovanja elementarne sile $\sigma_x dA$ oko osi z suprotno od smjera djelovanja M_z. Također je

$$dM_t = \tau_{xz} dA y - \tau_{xy} dA z,$$

odnosno

$$M_t = \int_A (y\tau_{xz} - z\tau_{xy}) dA. \tag{5.20}$$

Kad štap ima kružni poprečni presjek, prikladno je moment torzije izraziti pomoću komponenata u polarnim koordinatama. U tom slučaju prema slici 5.13 vrijedi

$$M_t = \int_A \tau_{x\varphi} \rho \, dA. \tag{5.21}$$

6. MEĐUSOBNA OVISNOST NAPREZANJA I DEFORMACIJA

6.1. Eksperimentalni podaci o međusobnoj ovisnosti naprezanja i deformacija

Ako neko tijelo opteretimo, u njemu će se pojaviti naprezanja i deformacije. Što je veće opterećenje, bit će veća naprezanja, ali i deformacije. Smanjujemo li naprezanja, smanjit će se i deformacije, pa zaključujemo da su naprezanja i deformacije međusobno ovisni, tj.

$$\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{ij}), \quad \varepsilon_{ij} = f_1(\sigma_{ij}). \tag{6.1}$$

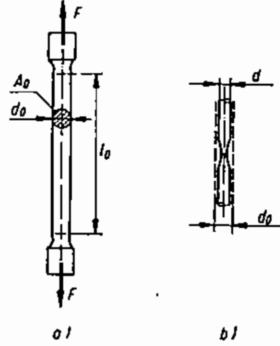
U ovom poglavlju razmatrat ćemo karakter međusobne ovisnosti naprezanja i deformacija. Zamislimo sada dva jednaka štapa koja su opterećena na jednak način, npr. savijanjem. Neka je jedan štap čelični, a drugi gumeni. Bez obzira na materijal od kojeg su izrađeni štapovi raspored i veličina naprezanja u oba slučaja bit će približno jednaki*; međutim, deformacije će se znatno razlikovati. Deformacije u gumenom štapu bit će mnogostruko veće od onih u čeličnom. Vidimo da deformacije ne ovise samo o naprezanjima nego i o deformabilnosti tijela. Prema tome, funkcije u izrazu (6.1) imaju različit oblik za razne materijale. Ovisnost naprezanja o deformacijama za razne materijale određuje se eksperimentalno. Najčešće se izvode pokusi rastezanja, sabijanja i smicanja. Ponekad se izvode i druge vrste pokusa. Rezultati pokusa rastezanja i sabijanja prikazuju se dijagramom u kojem se daje ovisnost sile F o promjeni duljine Δl.

Na slici 6.1 prikazan je najčešći oblik rastezne epruvete, a na slici 6.2 dijagram ovisnosti sile F o produljenju Δl za jedan niskougljični čelik. Na dijagramu uočavamo nekoliko karakterističnih točaka. Od točke O do P ovisnost sile o produljenju je linearna. Nakon toga dijagram nije više pravac, nego prelazi u krivulju. Do točke E deformacija je elastična, tj. nakon rasterećenja epruveta se potpuno vraća u prvobitni oblik i veličinu. Ako pri opterećenju pređemo točku E, u epruveti se javlja trajno ili plastično produljenje, tj. epruveta se nakon rasterećenja ne vraća u prvobitni oblik. Pri daljnjem povećanju sile F rastu produljenja sve do točke T'. Kad se pređe točka T', opterećenje naglo padne do točke T a produljenje i dalje raste. Nakon točke T pri približno konstantnoj sili raste produljenje do točke T'', nakon čega je potrebno povećavati opterećenje da bi došlo do porasta produlje-

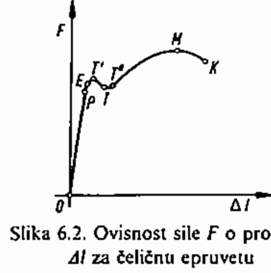
* Ponekad i raspored naprezanja ovisi o elastičnim svojstvima tijela.

nja. Opterećenje raste sve do točke M. Nakon točke M sila F u epruveti opada, a produljenje i dalje raste, dok napokon ne dođe do loma epruvete u točki K.

Mjerenjem je ustanovljeno da se epruveta ne produljuje samo za Δl, nego se poprečno kontrahira (steže, suzuje) za iznos Δd. Do točke T' poprečna je kontrakcija jednolika po čitavoj duljini štapa. Kad opterećenje dostigne točku T', nastupa u nekom presjeku naglo suženje, koje sve više raste, dok ne nastupi lom epruvete. To suženje naziva se vrat, a prikazano je na slici 6.1b.



Slika 6.1. Rastezna epruveta



Slika 6.2. Ovisnost sile F o produljenju Δl za čeličnu epruvetu

Podijelimo li silu F početnom površinom poprečnog presjeka epruvete A_0, dobit ćemo tzv. konvencionalno naprezanje

$$\sigma_0 = \frac{F}{A_0} \tag{6.2}$$

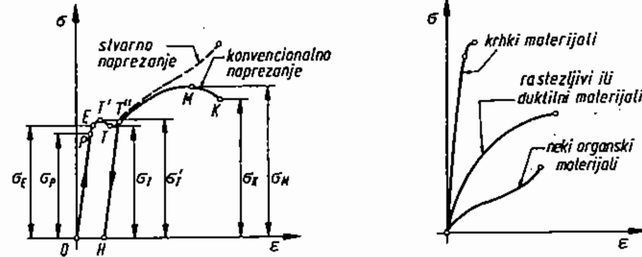
koje se razlikuje od pravog ili stvarnog naprezanja

$$\sigma = \frac{F}{A}, \tag{6.3}$$

gdje je A_0 početna, a A trenutna površina poprečnog presjeka. Do točke T' površina A neznatno se razlikuje od površine A_0, pa su i naprezanja σ i σ_0 gotovo jednaka. Podijelimo li produljenje Δl početnom duljinom l_0, dobit ćemo duljinsku deformaciju ε. Prema tome, dijagram na slici 6.2 u nekom drugom mjerilu prikazuje ujedno i ovisnost konvencionalnog naprezanja o deformaciji. Taj je dijagram još jednom prikazan na slici 6.3a. Punom crtom prikazano je konvencionalno a crtkano stvarno naprezanje. Na dijagramu je kotirano nekoliko karakterističnih vrijednosti naprezanja: granica proporcionalnosti σ_p, granica elastičnosti σ_E, gornja granica tečenja σ'_T, donja granica tečenja σ_T i vlačna ili rastezna čvrstoća σ_M. Ako je naprezanje manje od granice proporcionalnosti, deformacije su proporcionalne naprezanjima. Kad pređemo granicu proporcionalnosti, ovisnost naprezanja o deformacijama nije više linearna; međutim, sve do granice elastičnosti nema pojave plastičnih ili trajnih deformacija, tj. epruveta se nakon rasterećenja vraća u prvobitni oblik. To svojstvo tijela zove se *elastičnost*. Ako je naprezanje veće od granice elastičnosti, nakon

rasterećenja u tijelu zaostaju trajne deformacije. To svojstvo tijela zove se *plastičnost*. Vidimo da se isti materijal može ponašati kao elastičan i kao plastičan, ovisno o veličini opterećenja. Svojstva deformabilnosti tijela ovise o mnogim činiocima, kao npr. o temperaturi, brzini deformiranja itd.

Dijagrami rastezanja raznih materijala vrlo su raznoliki, ali se mogu svrstati u četiri osnovna oblika, od kojih je jedan prikazan na slici 6.3a, a preostala tri na slici 6.3b. Kod dijagrama na slici 6.3b nije izražena granica tečenja σ_T. Materijali koji pucaju bez pojave većih plastičnih deformacija nazivaju se krhki materijali. Rastezljivi ili duktilni materijali prije loma doživljavaju velike plastične deformacije. Polimerni i neki organski materijali imaju poseban oblik dijagrama rastezanja. Svi ti dijagrami prikazani su na slici 6.3b.



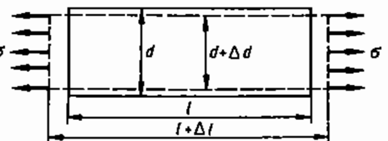
Slika 6.3. Osnovne vrste dijagrama rastezanja

Dijagrami sabijanja velikog broja materijala kvalitativno i kvantitativno vrlo su slični dijagramima rastezanja. Analogno vlačnoj čvrstoći definira se tlačna čvrstoća. Dijagrami sabijanja krhkih materijala kvantitativno se razlikuju od dijagrama rastezanja. Tlačna čvrstoća krhkih materijala može biti nekoliko puta veća od vlačne čvrstoće. Dijagrami smicanja $\tau = \tau(\gamma)$ po obliku su slični dijagramima rastezanja. Analogno kao kod rastezanja uvode se pojmovi: granica proporcionalnosti τ_p, granica elastičnosti τ_E, granica tečenja τ_T i čvrstoća smicanja τ_M. Naziv granica tečenja ili granica popuštanja materijala odnosi se na sve vrste opterećenja: rastezanja, sabijanje i smicanje. Umjesto granica tečenja ponekad se kod rastezanja upotrebljava naziv granica razvlačenja, a kod sabijanja granica gnječenja. Granica proporcionalnosti, granica elastičnosti i granica tečenja neznatno se razlikuju. Kako se σ_T najlakše određuje, u tablicama se često navodi samo ta vrijednost.

U mehanici krutih tijela uvodi se pojam idealnog krutog tijela, a u hidromehanici pojam idealne tekućine. Slično tome uvodi se u mehanici deformabilnih tijela idealno *elastično tijelo* i idealno *plastično tijelo*. Ako deformacije ne ovise samo o naprezanjima nego i o vremenu, tijelo je *viskoelastično*, odnosno *viskoplastično*. U Nauci o čvrstoći I i II razmatrat ćemo *linearnoelastična tijela*, tj. elastična tijela u području proporcionalnosti naprezanja i deformacija.

6.2. Hookeov zakon, modul elastičnosti, modul smicanja i Poissonov koeficijent

Na slici 6.4 prikazan je dio okruglog štapa (epruvete) koji je jednoliko opterećen na rastezanje. Punom crtom prikazan je štap prije opterećenja, a crtkano deformirani štap nakon opterećenja. Početna duljina l povećala se za iznos Δl, a promjer smanjio za iznos Δd. Prema tome je pri rastezanju štapa $\Delta l>0$, a $\Delta d<0$.



Slika 6.4. Ilustracija Hookeova zakona

Pri sabijanju imamo obratnu situaciju: duljina l se smanjuje, a promjer d povećava, tj. $\Delta l<0$, a $\Delta d>0$. Ako s ε označimo prosječnu uzdužnu deformaciju, a s ε_q prosječnu poprečnu deformaciju, možemo pisati

$$\varepsilon=\frac{\Delta l}{l}, \qquad \varepsilon_q=\frac{\Delta d}{d}.$$

To su ujedno i prave deformacije jer u štapu vlada jednoliko (homogeno) stanje naprezanja, odnosno jednoliko stanje deformacije. Prema dijagramima sa slike 6.3a i b vidimo da pri malim deformacijama postoji proporcionalnost između opterećenja i produljenja, odnosno između naprezanja σ i uzdužne deformacije ε. Pokusima je također dokazano da postoji proporcionalnost između uzdužne i poprečne deformacije. To možemo matematički izraziti ovako:

$$\sigma=E\varepsilon \tag{6.4}$$

$$\varepsilon_q=-\nu\varepsilon. \tag{6.5}$$

Faktori proporcionalnosti E i ν nazivaju se Youngov modul elastičnosti i Poissonov koeficijent. Izrazi (6.4 i 6.5) predstavljaju Hookeov zakon jednoosnog stanja naprezanja. Pojam modula elastičnosti uveo je 1807. god. Thomas Young, a Poissonov koeficijent S. D. Poisson 1828. god. Kako su ε_q i ε uvijek suprotnog predznaka, Poissonov je koeficijent pozitivan broj. Kod izotropnih je materijala $0\leqslant\nu\leqslant0,5$. Za većinu metala i metalnih legura je $\nu\approx0,3$.

Linearnu ovisnost posmičnih naprezanja i kutnih deformacija opisuje izraz

$$\tau=G\gamma, \tag{6.6}$$

koji se naziva Hookeov zakon smicanja. Veličina G naziva se Coulombov modul, *modul smicanja*, odnosno modul klizanja. Ako uzorak materijala opteretimo jednolikim tlakom p u svim smjerovima, promijenit će se njegov volumen. Eksperimenti pokazuju da je obujamna deformacija proporcionalna tlaku p, tj.

$$-p=K\Theta, \tag{6.7}$$

gdje je K obujamni (volumenski) modul elastičnosti odnosno modul kompresibilnosti ili stlačivosti.

Veličine E, G, ν, K, koje karakteriziraju elastična svojstva tijela nazivaju se zajedničkim imenom *konstante elastičnosti*. Za elastično tijelo dovoljno je poznavati samo dvije konstante elastičnosti jer se ostale mogu iz njih izračunati.

6.3. Dopušteno i proračunsko naprezanje, faktor sigurnosti

U tablici 6.1 navedeni su podaci o konstantama elastičnosti i toplinskom koeficijentu rastezanja, a u tablici 6.2 mehanička svojstva raznih tehničkih materijala. Navedeni podaci samo su prosječne vrijednosti. Stvarne vrijednosti za pojedine materijale mogu se znatno razlikovati od navedenih. U tehničkim priručnicima mogu se naći opširniji i pouzdaniji podaci o elastičnim i mehaničkim svojstvima. Ti podaci nam služe pri dimenzioniranju konstrukcija i strojeva.

Jedno od najvažnijih pitanja koje se pri tome pojavljuje jest: koliko smije biti najveće naprezanje u dijelu koji treba dimenzionirati? Prije nego odgovorimo na to pitanje definirat ćemo stvarno i proračunsko naprezanje. *Stvarno naprezanje* je ono naprezanje koje se u strojnom dijelu ili konstrukciji pojavljuje u redovnoj eksploataciji stroja. *Proračunsko naprezanje* je ono naprezanje koje očekujemo da će se pojaviti u strojnom dijelu na temelju proračuna. Proračunsko naprezanje vrlo se rijetko podudara sa stvarnim; može biti veće ili manje od stvarnog. Za to postoji više razloga. Često je najveća nepoznanica opterećenje. Sile koje djeluju na pojedine konstrukcije ili njihove dijelove nisu nam poznate. Teško je računski naći sile koje djeluju npr. na avionsko krilo, brod na uzburkanom moru, automobilsku osovinu pri vožnji po neravnu putu, na nož tokarskog stroja, lopaticu vodne ili parne turbine itd. Druga nesigurnost nastaje pri izboru proračunske sheme koja ne uzima u obzir sve detalje realne konstrukcije. Treći uzrok leži u netočnosti izraza nauke o čvrstoći. Osim toga u konstrukciji mogu postojati početna, montažna ili toplinska naprezanja koja su nam nepoznata. Zbog svega ovog proračunsko naprezanje samo je procjena stvarnog naprezanja.

Stvarno naprezanje očito mora biti manje od čvrstoće materijala, inače bi došlo do loma konstrukcije. Međutim, vrlo često ne smije se dopustiti pojava ni najmanjih plastičnih deformacija. Točnost izrade pojedinih strojnih dijelova izražava se u desetinkama ili stotinkama milimetra. Takva točnost bila bi nepotrebna ako bismo dopustili da se pojavom plastičnih deformacija strojni dio plastično deformira ma i za desetinku milimetra. Prema tome, moramo biti sigurni da je stvarno naprezanje manje od granice tečenja kod rastezljivih materijala, odnosno znatno manje od čvrstoće kod krhkih materijala. Kako stvarno naprezanje može biti veće od proračunskog, moramo osigurati da maksimalno proračunsko naprezanje bude manje od *dopuštenog naprezanja* σ_{dop} (ili τ_{dop}), koje je za krhke materijale definirano izrazom

$$\sigma_{dop}=\frac{\sigma_M}{S}, \qquad \tau_{dop}=\frac{\tau_M}{S}. \tag{6.8}$$

Tablica 6.1

Elastične konstante i koeficijent toplinskog rastezanja

MATERIJAL	E	G	ν	α
	GPa	GPa	–	10^{-6}/K
Ugljični čelik	200–210	80–81	0,24–0,28	12,5
Legirani čelik	210–220	80–81	0,25–0,30	10–13
Lijevano željezo	115–160	45	0,25–0,27	10,4
Bakar	84–130	40–49	0,31–0,34	16
Bronca	105–115	40–42	0,32–0,35	17,5
Mjed	90–120	35–37	0,32–0,42	18
Aluminij i legure	70–71	26–27	0,32–0,36	24
Magnezij i legure	45	17	–	26
Olovo	17	7	0,42	29
Staklo	56	22	0,25	8
Beton	15–40	–	0,08–0,18	0,11
Guma	0,01	–	0,47	–
Pluto	0,006	–	0,00	–

Tablica 6.2

Mehanička svojstva materijala u MPa

MATERIJAL	Granica proporcionalnosti			Čvrstoća		
	vlačna	tlačna	smična	vlačna	tlačna	smična
Ugljični čelik vruće valjan						
0,2% C	210	240	145	410	620	310
0,6% C	410	410	250	690	–	550
1,0% C	550	550	330	930	–	790
Čelični lijev odžaren. 0,2% C	210	210	125	410	–	310
Sivi lijev	42	170	–	140	550	–
Kovkasti lijev	140	140	70	345	–	275
Bakar odžaren	22	22	13	220	–	–
tvrdo vučen	260	260	160	380	–	–
Mjed lijevani (60% Cu: 40% Zn)	140	–	–	350	–	–
Bronca lijevana (90% Cu: 10% Sn)	140	–	–	280	–	–
Aluminij odžaren		–	–	70	–	–
tvrdo valjan		–	–	130	–	–
Duraluminij (96% Al; 2,9% Cu: 1% Mg)						
žaren	50	–	–	170	–	–
temperiran	130	–	–	350	–	–

Kod rastezljivih materijala dopušteno naprezanje je

$$\sigma_{dop} = \frac{\sigma_T}{S}, \qquad \tau_{dop} = \frac{\tau_T}{S}, \qquad (6.9)$$

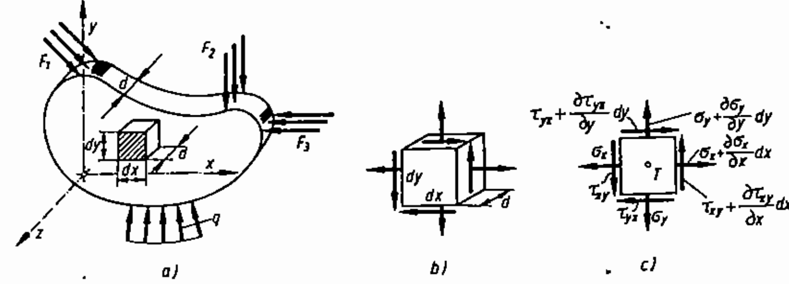
gdje su σ_M i τ_M vlačna (tlačna) odnosno smična čvrstoća, σ_T i τ_T vlačna i smična granica tečenja, a S faktor sigurnosti. Faktor sigurnosti uvijek je veći od jedan. Najčešće je $1{,}5 \leq S \leq 2{,}5$, ali može biti i znatno veći.

Izbor faktora sigurnosti ovisi o mnogim okolnostima, a između ostalog o: poznavanju opterećenja, opasnosti za ljudski život, važnosti konstrukcije, o tome da li je konstrukcija stabilna ili pokretna itd.

Problemi proračuna čvrstoće i dimenzioniranja vrlo su složeni i njima ćemo se više pozabaviti u narednim poglavljima. To što smo rekli odnosi se samo na mirna ili statička opterećenja i jednoosno napregnuto stanje, odnosno na čisto smicanje. Takva stanja naprezanja javljaju se pri aksijalnom opterećenju štapa, čistom smicanju, savijanju i uvijanju štapova.

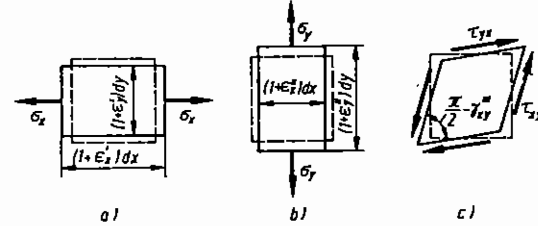
6.4. Hookeov zakon za ravninsko naprezanje

Na slici 6.5a prikazana je ploča u kojoj vlada ravninsko stanje naprezanja, tj. u kojoj je $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Element izrezan iz ploče prikazan je na istoj slici: b) i c). Da bismo odredili deformacije ε_x, ε_y i γ_{xy} elementa, primijenit ćemo metodu superpozicije. Na slici 6.6a prikazan je element opterećen samo naprezanjem σ_x. Crtkano je prikazan početni oblik elementa, a punom crtom deformirani oblik. Naprezanje σ_x izaziva deformacije $\varepsilon_x' = \sigma_x/E$, što slijedi iz Hookeova zakona (6.6). Analogno tome pomoću izraza (6.5) možemo odrediti



Slika 6.5. Ploča u kojoj vlada ravninsko stanje naprezanja

$\varepsilon_y' = -\nu\sigma_x/E$. Budući da normalno naprezanje ne izaziva kutnu deformaciju, bit će $\gamma_{xy}' = 0$. Na sličan način možemo odrediti deformacije koje izaziva naprezanje σ_y, prema slici 6.6b, tj. $\varepsilon_x'' = -\nu\,\sigma_y/E$, $\varepsilon_y'' = \sigma_y/E$ i $\gamma_{xy}'' = 0$. Element opterećen samo posmičnim naprezanjem prikazan je na slici 6.6c. U tom slučaju deformacije, prema (6.6), iznose $\gamma_{xy}''' = \tau_{xy}/G$, $\varepsilon_x''' = \varepsilon_y''' = 0$



Slika 6.6. Izvod Hookeova zakona za ravninsko naprezanje

Ukupne komponente deformacije odredit ćemo zbrajanjem, tj.

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x' + \varepsilon_x'' + \varepsilon_x'''$$
$$\varepsilon_y = \varepsilon_y' + \varepsilon_y'' + \varepsilon_y'''$$
$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}' + \gamma_{xy}'' + \gamma_{xy}'''$$

odnosno

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E}$$
$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E} \qquad (6.10)$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}.$$

Izraz (6.10) predstavlja Hookeov zakon za ravninsko stanje naprezanja. Pomoću tih izraza možemo odrediti deformacije ako su nam poznata naprezanja i elastične konstante materijala E, G i ν. Ako su nam poznate deformacije, prikladnije je pisati Hookeov zakon u obrnutom obliku. Shvatimo li prva dva izraza kao dvije jednadžbe s dvije nepoznanice: σ_x i σ_y, i zatim ih riješimo, dobit ćemo:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)$$
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \qquad (6.11)$$
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}.$$

Treća jednadžba tog izraza dobivena je iz treće jednadžbe izraza (6.10).

6.5. Hookeov zakon za prostorno (troosno) naprezanje

Hookeov zakon za troosno napregnuto stanje možemo izvesti na sličan način, i on glasi

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \qquad (6.12)$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \qquad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}.$$

U izrazima (6.7) prikazane su deformacije kao funkcije naprezanja; međutim, možemo naprezanja prikazati kao funkcije deformacija, tj.

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}\Theta\right), \qquad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$
$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu}\Theta\right), \qquad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \qquad (6.13)$$
$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}\Theta\right), \qquad \tau_{zx} = G\gamma_{zx},$$

gdje je $\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ obujamna deformacija. Već smo spomenuli da je kod ravninskog stanja deformacija $\sigma_z = 0$, a $\varepsilon_z \neq 0$. Sada možemo pomoću trećeg izraza: (6.12), dobiti

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\varepsilon_x + \varepsilon_y). \qquad (6.10a)$$

Izraz (6.10a) daje deformaciju ε_z pri ravninskom naprezanju.

6.6. Hookeov zakon za ravninsko stanje deformacija

Ravninsko stanje deformacija definirano je izrazom $\varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = 0$. Iako je u ovom slučaju $\varepsilon_z = 0$, bit će $\sigma_z \neq 0$, za razliku od ravninskog stanja naprezanja kad je $\sigma_z = 0$, a $\varepsilon_z \neq 0$. Ako u izraz (6.12) uvrstimo $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$, dobit ćemo Hookeov zakon za ravninsko stanje deformacija:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \qquad (6.14)$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$
$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y).$$

Iz prvog, drugog i četvrtog izraza (6.14) možemo dobiti:

$$\varepsilon_x = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y\right)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x\right). \qquad (6.15)$$

Uvedemo li oznake

$$E^* = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \nu^* = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad G^* = G, \qquad (6.16)$$

Hookeov zakon za ravninsko stanje deformacije glasi

$$\varepsilon_x=\frac{\sigma_x}{E^*}-\frac{\nu^*}{E^*}\sigma_y$$

$$\varepsilon_y=\frac{\sigma_y}{E^*}-\frac{\nu^*}{E^*}\sigma_x \qquad (6.17)$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G^*},$$

odnosno

$$\sigma_x=\frac{E^*}{1-(\nu^*)^2}(\varepsilon_x+\nu^*\varepsilon_y)$$

$$\sigma_y=\frac{E^*}{1-(\nu^*)^2}(\varepsilon_y+\nu^*\varepsilon_x) \qquad (6.18)$$

$$\tau_{xy}=G^*\gamma_{xy}.$$

Vidimo da su izrazi (6.17) i (6.18) potpuno analogni izrazima (6.10) i (6.11), što ima veliko značenje jer omogućuje analogno rješavanje problema ravninskog stanja naprezanja i ravninskog stanja deformacije.

6.7. Međusobna ovisnost konstanti elastičnosti

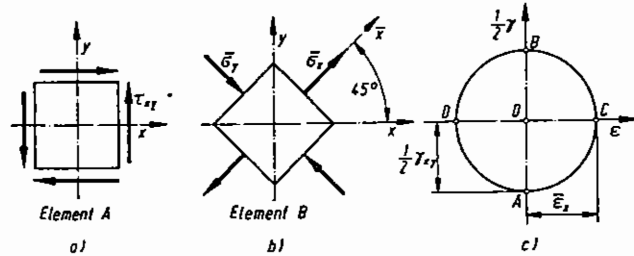
Na slici 6.7 prikazana su dva elementa na koje djeluju ekvivalentna naprezanja. Naime, prema primjeru 2.2 čisto smicanje odgovara istovremenom rastezanju i sabijanju u međusobno okomitim smjerovima jednakim iznosom $\sigma_1=-\sigma_2=\tau_{xy}$. Za element na slici 6.7a vrijedi

$$\gamma_{xy}=\tau_{xy}/G, \qquad \varepsilon_x=\varepsilon_y=0.$$

Odavde možemo pomoću izraza (3.21) dobiti glavne deformacije:

$$\varepsilon_1=\frac{1}{2}\gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{2G}$$

$$\varepsilon_2=-\frac{1}{2}\gamma_{xy}=-\frac{\tau_{xy}}{2G}. \qquad (6.19)$$



Slika 6.7. Čisto smicanje odgovara istovremenom sabijanju i rastezanju u okomitim presjecima

S druge strane za element na slici 6.7b vrijedi

$$\varepsilon_1=\frac{1}{E}(\sigma_1-\nu\sigma_2)$$

$$\varepsilon_2=\frac{1}{E}(\sigma_2-\nu\sigma_1).$$

Kad u gornje izraze uvrstimo $\sigma_1=\tau_{xy}$ i $\sigma_2=-\tau_{xy}$, dobit ćemo:

$$\varepsilon_1=\frac{1+\nu}{E}\tau_{xy}$$

$$\varepsilon_2=-\frac{1+\nu}{E}\tau_{xy}. \qquad (6.20)$$

Kako na oba elementa djeluju ekvivalentna stanja naprezanja, bit će i glavne deformacije jednake. Usporedbom izraza (6.19) s izrazom (6.20) dobit ćemo

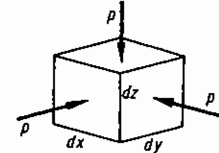
$$E=\frac{G}{2(1+\nu)}. \qquad (6.21)$$

Na slici 6.8 prikazan je element na koji djeluje hidrostatički pritisak p sa svih strana. Prema Hookeovu zakonu za tu vrstu naprezanja (6.7) vrijedi

$$p=-K\Theta,$$

gdje je K prostorni modul elastičnosti a Θ obujamna deeformacija. Prema (3.15) vrijedi

$$\Theta=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z.$$



Slika 6.8. Element podvrgnut hidrostatičkom tlaku

S druge strane za element na slici 6.8 vrijedi

$$\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=-p,$$

što uvršteno u Hookeov zakon

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}[\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z)]$$

daje

$$\varepsilon_x=-\frac{p}{E}(1-2\nu)=\varepsilon_y=\varepsilon_z.$$

Uvrstimo sada vrijednost za $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z$ u (3.15), pa ćemo dobiti

$$\Theta = -p\frac{3(1-2\nu)}{E}. \qquad (6.22)$$

Usporedbom tog izraza s izrazom (3.15) dobit ćemo

$$\Theta = -p\frac{3(1-2\nu)}{E} = -p\frac{1}{K}.$$

Odavde je

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \qquad (6.23)$$

Kad je $\nu = 0{,}5$, obujamni modul elastičnosti postaje beskonačno velik. To znači da za materijale s $\nu = 0{,}5$ ne dolazi do promjene obujma bez obzira na veličinu naprezanja. Kad bi bilo $\nu > 0{,}5$, K bi postao negativan, što znači da bi pri tlačnom naprezanju obujam rastao, odnosno da bi se pri vlačnom naprezanju obujam smanjivao. Kako je to fizikalno neprihvatljivo, zaključujemo da mora biti $\nu < 0{,}5$ što potvrđuju i brojna mjerenja.

PRIMJER 6.1

Aluminijski kvadar obujma $V = 15\,\text{dm}^3$ podvrgnut je sa svih strana jednolikom tlaku $p = 15\,\text{MPa}$. Izračunati:

a) obujamni modul elastičnosti K i modul smicanja G

b) obujamnu deformaciju Θ i promjenu obujma ΔV.

Zadano: $E = 70\,\text{GPa}$, $\nu = 0{,}33$.

a) $K = \dfrac{E}{3(1-2\nu)} = 53{,}03\,\text{GPa}$

$G = \dfrac{E}{2(1+\nu)} = 26.32\,\text{GPa}$

b) $\Theta = -\dfrac{p}{K} = -\dfrac{15\cdot 10^6}{53.03\cdot 10^9} = -0{,}2829\cdot 10^{-3}$

$\Delta V = \Theta\cdot V = -0.2829\cdot 10^{-3}\cdot 15\cdot 10^{-3}\,\text{m}^3$

$\Delta V = -4{,}249\cdot 10^{-6}\,\text{m}^3 = -4{,}249\,\text{cm}^3.$

PRIMJER 6.2

U zatvorenoj cilindričnoj posudi polumjera r i debljine stijenke h vlada pretlak p, prema slici 6.9a. Naći: a) naprezanje σ_x i σ_φ, b) povećanje polumjera Δr. Zadano: p, r, h, E.

a) Da bismo odredili naprezanje σ_x, presijecimo posudu poprečnom ravninom. Ravnoteža presječenog dijela, prema slici 6.8b, glasi

$$\Sigma F_x = 2r\pi h\sigma_x - p r^2\pi = 0, \qquad (a)$$

odakle je

$$\sigma_x = \frac{pr}{2h}. \qquad (b)$$

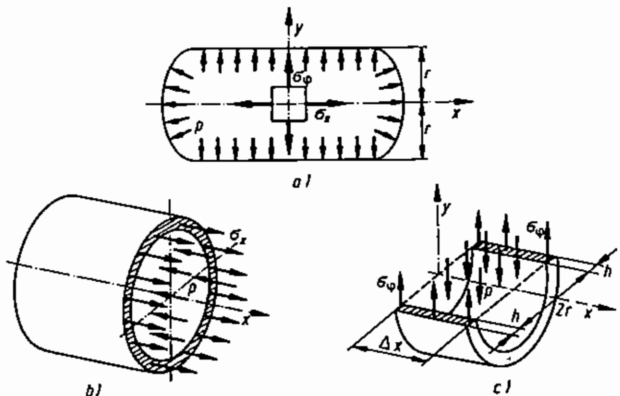
Dio posude, prema slici 6.9c, isječen je pomoću dvije poprečne ravnine i jedne ravnine koja prolazi kroz os posude. Ravnoteža tog dijela posude glasi

$$\Sigma F_y = 2\Delta x\, h\sigma_\varphi - p\,2r\Delta x = 0.$$

Odavde dobivamo

$$\sigma_\varphi = \frac{pr}{h}. \qquad (c)$$

Naprezanje σ_φ u cirkularnom smjeru dvaput je veće od normalnog naprezanja σ_x u uzdužnom smjeru.



Slika 6.9. Naprezanja u cilindričnoj tlačnoj posudi

b) Povećanje polumjera

Duljinska deformacija u cirkularnom smjeru ε_φ iznosi

$$\varepsilon_\varphi = \frac{2(r+\Delta r)\pi - 2r\pi}{2r\pi} = \frac{\Delta r}{r}, \qquad (d)$$

gdje je $2(r+\Delta r)\pi$ opseg posude nakon deformiranja, a $2r\pi$ opseg prije deformiranja. U plaštu posude vlada približno ravninsko stanje naprezanja jer je naprezanje σ_z zanemarivo maleno u odnosu na σ_x i σ_φ. (Na vanjskoj strani plašta je $\sigma_z = 0$, a na unutrašnjoj $\sigma_z = -p$.) U tom slučaju Hookeov zakon glasi

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\sigma_\varphi}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_x. \qquad (e)$$

Uvrstimo li izraze (b), (c) i (d) u (e), dobit ćemo

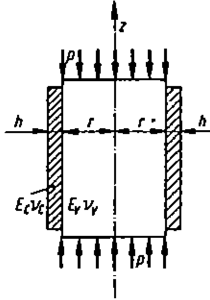
$$\varepsilon_\varphi=\frac{pr}{2hE}(2-\nu)=\frac{\Delta r}{r}.$$

Odavde možemo dobiti izraz za povećanje polumjera

$$\Delta r=\frac{pr^2}{2hE}(2-\nu). \qquad \text{(f)}$$

PRIMJER 6.3

Kružni valjak polumjera r postavljen je bez zračnosti i prednaprezanja u cijev debljine stijenke h, a zatim opterećen tlakom p, prema slici 6.10. Naći naprezanje u cijevi ako je zadano: r, p, h, E_v, ν_v, E_c, ν_c. Zanemariti trenje između cijevi i valjka.



Slika 6.10

Pod djelovanjem tlaka p valjak nastoji da se poprečno širi, što sprečava cijev. Zbog toga se na mjestu dodira cijevi i valjka javlja pritisak. Problem je sam po sebi statički neodređen i riješit ćemo ga pomoću uvjeta

$$\Delta r_c=\Delta r_v, \qquad \text{(a)}$$

gdje je Δr_c prirast polumjera cijevi, a Δr_v prirast polumjera valjka. Označimo s p_1 pritisak između cijevi i valjka. U tom slučaju normalna naprezanja u cijevi iznose

$$\sigma_{rc}\approx 0,\quad \sigma_{zc}=0,\quad \sigma_{\varphi c}=\frac{p_1 r}{h}. \qquad \text{(b)}$$

Naprezanje σ_φ isto je kao i u prethodnom zadatku, dok je naprezanje σ_z jednako nuli jer cijev nije rastezana uzdužno. Deformaciju $\varepsilon_{\varphi c}$ izračunat ćemo pomoću Hookeova zakona

$$\varepsilon_{\varphi c}=\sigma_{\varphi c}/E_c=\frac{p_1 r}{hE_c}.$$

Prirast polumjera cijevi iznosi

$$\Delta r_c=r\varepsilon_{\varphi c}=\frac{p_1 r^2}{hE_c}. \qquad \text{(c)}$$

Normalno naprezanje u smjeru osi z u valjku iznosi

$$\sigma_{zv}=-p. \qquad \text{(d)}$$

Zbog aksijalne simetrije ostala su dva normalna naprezanja jednaka i iznose p_1, dakle:

$$\sigma_{xv}=\sigma_{yv}=-p_1.$$

Kako je prikazano u primjeru 2.5, možemo pisati

$$\sigma_{rv}=\sigma_{\varphi v}=-p_1. \qquad \text{(e)}$$

Radijalna deformacija valjka iznosi

$$\varepsilon_{rv}=\frac{\sigma_{rv}}{E}-\frac{\nu_v}{E}(\sigma_{\varphi v}+\sigma_{zv})$$

odnosno

$$\varepsilon_{rv}=-\frac{p_1}{E_c}+\frac{\nu_v}{E_v}(p_1+p).$$

Povećanje polumjera valjka je

$$\Delta r_v=r\cdot\varepsilon_{rv}. \qquad \text{(f)}$$

Uvrstimo li izraze (c) i (f) u (a), dobit ćemo

$$\frac{p_1 r^2}{2hE_c}=-\frac{p_1(1-\nu_v)}{E_v}r+\frac{p\nu_v}{E_v}r.$$

Odavde je

$$p_1=p\frac{2\nu_v}{2(1-\nu_v)+\dfrac{E_v r}{E_c h}}. \qquad \text{(g)}$$

Dodirni pritisak između valjka i cijevi veći je što je veći Poissonov koeficijent ν_v, i što su manji omjeri E_v/E_c i r/h. Izračunat ćemo p_1 za dva vrlo različita slučaja. Uprvom slučaju odabrat ćemo gumeni valjak i čeličnu cijev s omjerom $r/h=10$. Manji omjer ne smijemo uzeti jer smo zadatak riješili pod pretpostavkom da je cijev tanka. Svojstva gume i čelika, prema tablici 1, iznose $E_c=200$ GPa, $E_v=8$ MPa, $\nu_v=0{,}47$, $\nu_c=0{,}27$. Uvrstimo li te podatke u (g), dobit ćemo $p_1=0{,}887\,p$. Razmotrimo sada slučaj čeličnog valjka i gumene cijevi uz $r/h=10$. Uvrstimo li potrebne podatke u (g), dobit ćemo $p_1=2{,}16\cdot 10^{-5}\,p$, što je zanemarivo maleno,

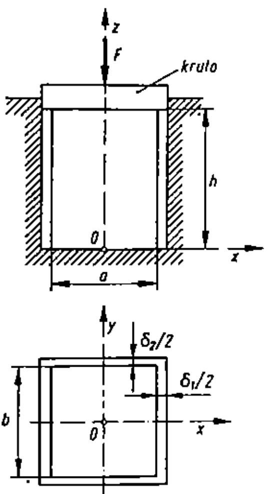
PRIMJER 6.4

Elastični blok $a\cdot b\cdot h$ modula elastičnosti E i Poissonova koeficijenta ν postavljen je u pravokutnu šupljinu presjeka $(a+\delta_1)(b+\delta_2)$. Modul elastičnosti materijala stijenki mnogo je veći od modula elastičnosti bloka, tako da se stijenke mogu smatrati idealno krutim. Blok je pritisnut silom F, prema slici 6.11. Odrediti:

a) silu F_1, pri kojoj će blok s dvije strane dodirnuti stijenke šupljine i promjenu visine h_1 koja pri tome nastaje;

b) silu F_2, pri kojoj će blok i s preostale dvije strane dodirnuti stijenke, naprezanja σ_x, σ_y i σ_z i promjenu visine Δh_2 koja pri tome nastaje.

Trenje bloka o stijenke šupljine zanemariti. Zadano: $E=200$ MPa, $\nu=0{,}4$, $a=0{,}1$ m, $b=2a$, $h=3a$, $\delta_1=0{,}002a$, $\delta_2=0{,}0032a$.



Slika 6.11

a) U trenutku kad blok dodirne stijenke još nema pritiska između stijenki šupljine i bloka. pa naprezanja iznose

$$\sigma_x=\sigma_y=0,\quad \sigma_z=-\frac{F_1}{2a^2}. \tag{a}$$

Zanemarimo li trenje, u bloku će vladati jednoliko stanje naprezanja i deformacije. Prosječna deformacija po širini bloka jednaka je pravoj deformaciji, pa će u trenutku kad blok ispuni šupljinu biti

$$\varepsilon_x=\frac{\delta_1}{a}=0{,}002,\quad \varepsilon_y=\frac{\delta_2}{2a}=0{,}0016. \tag{b}$$

Kako je deformacija ε_y manja, prije će se zatvoriti zračnost δ_2. Potrebnu silu, odnosno naprezanje odredit ćemo pomoću Hookeova zakona

$$\varepsilon_y=\frac{\sigma_y}{E}-\frac{\nu}{E}(\sigma_z+\sigma_x). \tag{c}$$

Uzmemo li u obzir da je $\sigma_x=\sigma_y=0$, bit će

$$\sigma_z=-\frac{E}{\nu}\varepsilon_y=-0{,}0016\frac{E}{\nu}, \tag{d}$$

odnosno

$$F_1=-\sigma_z\cdot 2\cdot a^2=0{,}0032\frac{Ea^2}{\nu}. \tag{e}$$

Kad uvrstimo zadane podatke u (e), dobit ćemo:

$$F_1=0{,}008\cdot E\cdot a^2=0{,}008\cdot 200\cdot 10^6\cdot 0{,}1^2\ \text{MN}$$

$$F_1=0{,}016\ \text{MN}=16\ \text{kN}.$$

Kako je $\varepsilon_z=\Delta h_1/h$, promjena visine h iznosi

$$\Delta h_1=\varepsilon_z\cdot h. \tag{f}$$

Deformaciju ε_z odredit ćemo pomoću izraza $\nu=-\varepsilon_y/\varepsilon_z$, tj.

$$\varepsilon_z=-\varepsilon_y/\nu,$$

što uvršteno u (f) daje

$$\Delta h_1=-\varepsilon_y\cdot h/\nu=-0{,}0016\cdot 0{,}1/0{,}4\ \text{m}$$

$$h_1=0{,}0008\ \text{m}.$$

b) U tom su slučaju deformacije definirane izrazom (b). Naprezanje σ_x jednako je nuli jer nema pritiska stijenki na blok u smjer osi x, jer je blok upravo dodirnuo stijenke. Prema tome Hookeov zakon glasi

$$\varepsilon_x=-\frac{\nu}{E}(\sigma_y+\sigma_z)=0{,}002 \tag{g}$$

$$\varepsilon_y=\frac{\sigma_y}{E}-\frac{\nu}{E}\sigma_z=0{,}0016 \tag{h}$$

$$\varepsilon_z=\frac{\sigma_z}{E}-\frac{\nu}{E}\sigma_y. \tag{i}$$

Izrazi (g) i (h) predstavljaju dvije jednadžbe s dvije nepoznanice: σ_y i σ_z. Rješavanjem tih jednadžbi dobivamo:

$$\sigma_z=(\sigma_y-E\varepsilon_y)/\nu$$

$$\sigma_y=-E(\varepsilon_x-\varepsilon_y)/(1+\nu).$$

Uvrstimo li konkretne podatke, dobit ćemo:

$$\sigma_y=-0{,}2857\,10^{-3}\cdot E=57{,}15\ \text{kPa}$$

$$\sigma_z=-4{,}7143\,10^{-3}\cdot E=942{,}86\ \text{kPa}. \tag{k}$$

Sila kojom treba pritisnuti blok iznosi

$$F_2 = -2a^2\,\sigma_z = 9{,}429\,10^{-3}\cdot E\cdot a^2 = 18{,}857\,\text{kN}.$$

Uvrstimo li (k) u (i), dobit ćemo

$$\varepsilon_z = [-4{,}7143 - 0{,}4(-0{,}2857)]\,10^{-3} = -4{,}6\cdot 10^{-3},$$

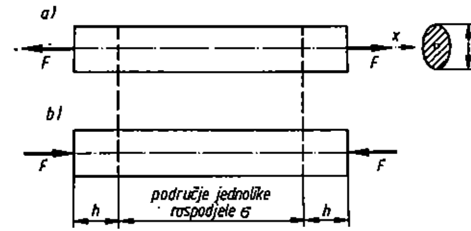
odnosno

$$\Delta h_2 = \varepsilon_z h = -4{,}6\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}3 = -1{,}38\cdot 10^{-3}\,\text{m} = -1{,}38\,\text{mm}.$$

7. AKSIJALNO OPTEREĆENJE ŠTAPOVA

7.1. Ravni prizmatični štapovi

Razmotrimo ravan štap proizvoljnog ali konstantnog poprečnog presjeka koji je opterećen dvjema silama, prema slici 7.1. Ako sile prolaze kroz težište poprečnog presjeka štapa, vanjsko se opterećenje reducira samo na uzdužnu silu N i u tom slučaju kažemo da je štap aksijalno opterećen. Ako su sile raspoređene, kao na slici 7.1a, štap je opterećen vlačno ili na rastezanje, a ako su sile raspoređene prema slici 7.1b, štap je opterećen tlačno ili na sabijanje.



Slika 7.1. Osno opterećenje štapa a) rastezanje ili vlak b) sabijanje ili tlak

Eksperimentalna mjerenja, a i analiza metodama teorije elastičnosti, pokazuju da se na udaljenosti h od krajeva štapa naprezanja raspodjeljuju praktički jednoliko i iznose

$$\sigma_x = \frac{N}{A}, \tag{7.1}$$

gdje je N uzdužna sila, a A površina poprečnog presjeka. U slučaju vlaka je $N = F$, tj.

$$\sigma_x = \frac{F}{A}, \tag{7.2}$$

a u slučaju tlaka je $N = -F$, tj.

$$\sigma_x = -\frac{F}{A}, \tag{7.3}$$

gdje je F apsolutna vrijednost sile u oba slučaja. Izrazi od (7.1) do (7.3) vrijede za srednji dio štapa neovisno o raspodjeli sila na krajevima. Bitna je veličina njihove rezultante F i njen pravac koji mora prolaziti kroz težište poprečnog presjeka. Raspored naprezanja u rubnim dijelovima štapa bitno ovisi o tome kako se sila prenosi na kraj štapa. O naprezanjima u tom dijelu reći ćemo nešto više kad budemo govorili o koncentraciji naprezanja. U praksi je redovno duljina štapa l mnogo veća od poprečne dimenzije h (50 do 100 puta ili više), pa se za izračunavanje produljenja štapa neravnomjernost naprezanja u blizini ruba može zanemariti, tj. možemo smatrati da su deformacije i naprezanja jednoliko raspodijeljeni po čitavoj duljini štapa. U tom je slučaju srednja duljinska deformacija štapa jednaka pravoj deformaciji, tj.

$$\frac{\Delta l}{l}=\varepsilon_{xsr}, \tag{7.4}$$

odnosno

$$\Delta l=\varepsilon_x l. \tag{7.4a}$$

Ukupna duljina štapa nakon deformiranja iznosi

$$l+\Delta l=(1+\varepsilon_x)l. \tag{7.5}$$

Pomoću Hookeova zakona $\varepsilon_x=\sigma_x/E$ možemo izraz (7.4a) napisati u obliku

$$\Delta l=\frac{\sigma_x}{E}l. \tag{7.6}$$

Uzmemo li u obzir da je $\sigma_x=N/A$, gornji izraz prelazi u

$$\Delta l=\frac{Nl}{AE}. \tag{7.7}$$

Izraz (7.7) vrijedi ako je uzdužna sila N konstantna po cijeloj duljini štapa, tj. ako je štap opterećen dvjema silama na krajevima, kako je prikazano na slici 7.1. U tom slučaju možemo pisati

$$\Delta l=\frac{Fl}{AE} \quad \text{za rastezanje}$$
$$\Delta l=-\frac{Fl}{AE} \quad \text{za sabijanje,} \tag{7.7a}$$

gdje je F apsolutna vrijednost sile. Produljenje Δl je pozitivno ako se duljina povećava, a negativno ako se smanjuje.

U slučaju kad je štap opterećen nizom koncentriranih sila i kad se poprečni presjek mijenja skokovito, kao na slici 7.2, ukupno produljenje štapa iznosi

$$\Delta l=\sum_{i=1}^{n}\frac{N_i l_i}{AE_i}, \tag{7.8}$$

gdje je l_i duljina dijela štapa kojem je $N_i=\text{konst}$ i $AE_i=\text{konst}$.

Ako je opterećenje raspodijeljeno kontinuirano ili se presjek štapa mijenja kontinuirano, trebalo bi štap podijeliti na beskonačno mnogo beskonačno kratkih dijelova duljine Δx. U tom je slučaju

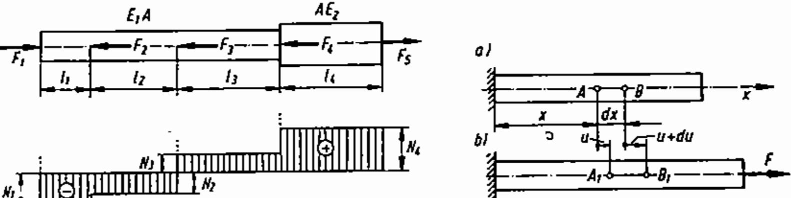
$$\Delta l=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\frac{N_i\,\Delta x_i}{AE_i}.$$

Ta beskonačna suma predstavlja određeni integral, pa je produljenje Δl dano izrazom

$$\Delta l=\int_l \frac{N\,\mathrm{d}x}{AE}. \tag{7.9}$$

Aksijalna krutost AE homogenog štapa konstantnog poprečnog presjeka konstantna je, pa se može izvući pred znak integrala, tj.

$$\Delta l=\frac{1}{AE}\int_l N\,\mathrm{d}x \tag{7.10}$$



Slika 7.2. Dijagram uzdužnih sila

Slika 7.3. Veza deformacije ε_x i pomaka u

Na slici 7.3a prikazan je neopterećen štap s označenim dvjema bliskim točkama A i B. Opteretimo li štap silom F, točke koje leže na osi štapa pomiču se udesno paralelno s osi x, kako je prikazano na slici 7.3b. Očito je da su pomaci raznih točaka različiti. Pomak lijevog kraja jednak je nuli. Što je točka više udaljena od lijevog kraja, više se pomiče udesno. Prema tome možemo reći da pomak u ovisi o položaju x, tj. $u=u(x)$. Neka je koordinata točke A; x, a koordinata točke B; $x+\Delta x$. Ako je pomak točke A; u, pomak točke B bit će $u+\Delta u$. Srednja deformacija dužine AB iznosi

$$\varepsilon_{xsr}=\frac{\overline{A_1B_1}-\overline{AB}}{\overline{AB}}=\frac{(\Delta x+\Delta u)-\Delta x}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Prava deformacija u točki A iznosi

$$\varepsilon_x=\lim_{x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}. \tag{7.11}$$

Prema izrazu (7.11) prirast pomaka u iznosi

$$\mathrm{d}u=\varepsilon_x\,\mathrm{d}x,$$

što nakon integriranja postaje

$$u=\int \varepsilon_x \,\mathrm{d}x+C. \tag{7.12}$$

Konstantu integracije C možemo odrediti iz rubnih uvjeta.

Budući da je $N=A\,\sigma_x$ i $\sigma_x=\varepsilon_x E$, možemo pisati $N=AE\,\varepsilon_x$. Pomoću (7.11) možemo taj izraz pisati u obliku

$$N=AE\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}. \tag{7.13}$$

Deriviramo li gornji izraz po x, dobit ćemo

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(AE\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right). \tag{7.14}$$

Kako je prema (5.7) $\mathrm{d}N/\mathrm{d}x=-q_x$, bit će

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(AE\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)=-q_x. \tag{7.15}$$

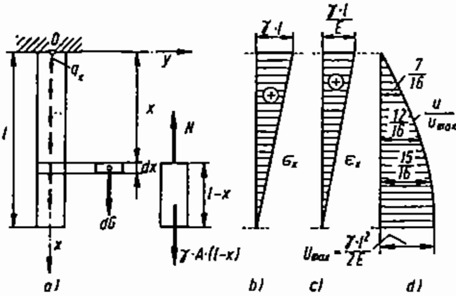
Ako štap ima konstantnu aksijalnu krutost, tj. ako je $AE=$konst., bit će

$$AE\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=-q_x. \tag{7.16}$$

Izrazi (7.15 i 7.16) predstavljaju osnovne diferencijalne jednadžbe osno-opterećenog štapa.

PRIMJER 7.1

Prizmatični štap presjeka A, duljine l i specifične težine γ obješen je, prema slici 7.4, i opterećen vlastitom težinom. Skicirati i kotirati dijagrame naprezanja σ_x, deformacije ε_x, pomaka u i odrediti ukupno produljenje Δl. Zadano: γ, l, E.



Slika 7.4. Štap opterećen vlastitom težinom

Štap je opterećen kontinuiranim opterećenjem q_x. Da bismo odredili intenzitet tog opterećenja, trebamo odrediti težinu elementa duljine $\mathrm{d}x$. Težina tog elementa iznosi $\mathrm{d}G=\gamma\,\mathrm{d}V=\gamma A\,\mathrm{d}x$. Kako je ta sila raspodijeljena na duljini $\mathrm{d}x$. bit će

$$q_x=\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}=\frac{\gamma A\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}=\gamma A. \tag{a}$$

Prema izrazu (5.7) jest

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}=-q_x=-\gamma A,$$

što nakon integriranja daje

$$N=-\gamma A\int \mathrm{d}x+C=-\gamma Ax+C.$$

Konstantu integracije C odredit ćemo iz uvjeta na donjem kraju štapa, gdje je $N=0$ za $x=l$, tj.

$$N=-\gamma Al+C=0.$$

Odavde je $C=\gamma Al$, pa je

$$N=\gamma A\,(l-x). \tag{b}$$

Do tog zaključka mogli smo doći neposredno promatranjem ravnoteže donjeg dijela štapa duljine $l-x$. Ako znamo uzdužnu silu, lako možemo odrediti naprezanje, a zatim pomoću Hookeova zakona i deformaciju

$$\sigma_x=\frac{N}{A}=\gamma\,(l-x) \tag{c}$$

$$\varepsilon_x=\frac{\sigma_x}{E}=\frac{\gamma}{E}(l-x). \tag{d}$$

I deformacija i naprezanje jednaki su nuli na donjem kraju štapa ($x=l$), dok na gornjem kraju ($x=0$) imaju maksimalne vrijednosti: $\sigma_{\max}=\gamma l$ i $\varepsilon_{\max}=\gamma l/E$, kako je prikazano na slici 7.4. Pomak u odredit ćemo pomoću izraza (7.12):

$$u=\int \varepsilon_x \,\mathrm{d}x+C=\frac{\gamma}{E}\int (l-x)\,\mathrm{d}x+C$$

$$u=\frac{\gamma}{E}\left(lx-\frac{x^2}{2}\right)+C.$$

Kako je za $x=0$ $u=0$, bit će $C=0$, tj.

$$u=\frac{\gamma l^2}{2E}\left[2\left(\frac{x}{l}\right)-\left(\frac{x}{l}\right)^2\right]. \tag{e}$$

Vidimo da pomak raste po zakonu parabole. Maksimalni pomak nastaje za $x=l$. To je ujedno i produljenje štapa jer je gornji kraj štapa nepomičan, tj.

$$\Delta l=u_{max}=\frac{\gamma l^2}{2E}. \tag{f}$$

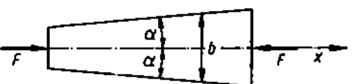
Pomnožimo li brojnik i nazivnik s A i uzmemo li u obzir da je $\gamma lA=G$, dobit ćemo

$$\Delta l=\frac{\gamma lAl}{2AE}=\frac{Gl}{2AE}.$$

Da smo štap zanemarive težine opteretili na donjem kraju silom $F=G$, štap bi se produljio za $\Delta l=Gl/AE$. Prema tome, možemo zaključiti da je produljenje štapa dvaput manje ako je opterećenje jednoliko raspodijeljeno po čitavoj duljini, nego ako djeluje koncentrirano na slobodnom kraju.

7.2. Štapovi promjenljivog presjeka

Pri nagloj promjeni poprečnog presjeka štapa pretpostavka o jednolikoj raspodjeli naprezanja po poprečnom presjeku nije ni približno ispunjena. Na mjestima nagle promjene presjeka javlja se koncentracija naprezanja, tj. maksimalno je naprezanje mnogo veće od prosječnog naprezanja. U tom slučaju izrazi koje smo izveli u ovom poglavlju više ne vrijede. Ako se poprečni presjek mijenja postepeno, pretpostavka o jednolikoj raspodjeli naprezanja bit će približno ispunjena. Značenje postepene promjene poprečnog presjeka ilustrirat ćemo pomoću slike 7.5 koja prikazuje plosnati štap konstantne debljine h i promjenljive širine $b=b(x)$. Kao i u slučaju ravnog štapa promatrat ćemo presjek dovoljno udaljen od kraja, tako da izbjegnemo prelazno rubno područje. Ako je $\alpha=10°$, maksimalno se naprezanje razlikuje za oko 2% od srednjeg naprezanja. U slučaju kad je kut $\alpha=15°$ maksimalno je naprezanje oko 5% veće od srednjeg naprezanja. Ograničimo li se na pogreške manje od 5%, mora kut α biti manji od 15°.

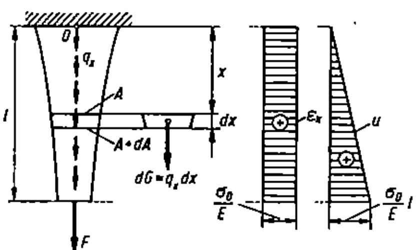


Slika 7.5. Štap promjenljivog presjeka

Svi izrazi izvedeni u poglavlju 7.1 (osim izraza 7.4 do 7.7, te 7.10 i 7.15) vrijede i za štapove promjenljiva presjeka.

PRIMJER 7.2

Štap promjenljiva presjeka A i duljine l opterećen je vlastitom težinom i silom F, prema slici 7.6. Naći zakon promjene poprečnog presjeka tako da naprezanje σ_x bude konstantno i iznosi σ_0. Skicirati dijagrame ε_x i u. Odrediti ukupno produljenje štapa. Zadano: γ, F, l, σ_0.



Slika 7.6. Štap jednake čvrstoće

Kao i u primjeru 7.1 štap je opterećen kontinuiranim opterećenjem

$$q_x=\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}=\gamma A. \qquad \text{(a)}$$

Kako je naprezanje konstantno, bit će $N=\sigma_0 A$, pa prema izrazu (5.7) možemo pisati

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}=-q_x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sigma_0 A)=-\gamma A.$$

Uzmemo li u obzir da je $\sigma_0=$konst., dobit ćemo nakon deriviranja

$$\sigma_0\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}=-\gamma A,$$

što nakon sređivanja daje

$$\frac{\mathrm{d}A}{A}=-\frac{\gamma}{\sigma_0}\mathrm{d}x.$$

Tu diferencijalnu jednadžbu možemo lako integrirati pa ćemo dobiti

$$\ln A=-\frac{\gamma}{\sigma_0}x+C.$$

Označimo poprečni presjek na gornjem i donjem kraju s A_1 i A_2. U tom slučaju rubni uvjet glasi: za $x=0$, $A=A_1$, odnosno

$$\ln A_1=C,$$

tako da je

$$\ln A-\ln A_1=-\frac{\gamma}{\sigma_0}x$$

ili

$$\ln\frac{A}{A_1}=-\frac{\gamma}{\sigma_0}x$$

$$A=A_1\,\mathrm{e}^{-\frac{\gamma x}{\sigma_0}}. \qquad \text{(b)}$$

Vidimo da pri porastu x površina poprečnog presjeka opada po eksponencijalnom zakonu i za $x=l$ iznosi

$$A_2=A_1\,\mathrm{e}^{-\frac{\gamma l}{\sigma_0}}. \qquad \text{(c)}$$

Naprezanje na donjem kraju iznosi

$$\sigma_x=\frac{F}{A_2}=\sigma_0. \qquad \text{(d)}$$

Odavde je $A_2=F/\sigma_0$. Usporedbom tog izraza s (c) dobit ćemo

$$\frac{F}{\sigma_0}=A_1\,\mathrm{e}^{-\frac{\gamma l}{\sigma_0}}$$

odnosno $A_1 = \frac{F}{\sigma_0} e^{\frac{\gamma l}{\sigma_0}}$, što uvršteno u (b) daje

$$A = \frac{F}{\sigma_0} e^{\frac{\gamma l}{\sigma_0}} \; e^{-\frac{\gamma x}{\sigma_0}}$$

odnosno

$$A = \frac{F}{\sigma_0} e^{\frac{\gamma}{\sigma_0}(l-x)}. \tag{e}$$

Prema Hookeovu zakonu jest

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{\sigma_0}{E} = \text{konst.}$$

Pomak u odredit ćemo pomoću izraza (7.12)

$$u = \int \varepsilon_x \,\mathrm{d}x + C = \frac{\sigma_0}{E} \int \mathrm{d}x + C$$

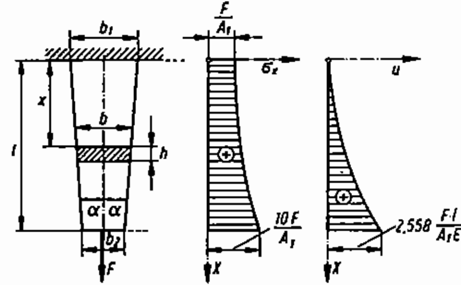
$$u = \frac{\sigma_0}{E} x + C.$$

Kako je za $x=0$, $u=0$, bit će $C=0$. U tom je slučaju $u = \sigma_0 x/E$. Vidimo da pomak raste linearno prema donjem kraju. Maksimalan pomak ujedno je jednak produljenju štapa, tj.

$$\Delta l = u_{max} = \frac{\sigma_0 l}{E}.$$

PRIMJER 7.3

Plosnati štap pravokutnog poprečnog presjeka konstantne debljine h i promjenljive širine b učvršćen je na gornjem kraju, a na donjem opterećen silom F, prema slici 7.7. Skicirati dijagram naprezanja i pomaka u ako je zadano: $F = 10$ kN, $\alpha = 4°$, $b_1 = 10$ cm, $b_2 = 10$ cm, $E = 200$ GPa.



Slika 7.7. Rastezanje štapa promjenljive širine

Kako je kut α manji od 15°, možemo primijeniti izraz (7.13), a da ne napravimo grešku veću od 5%. Širina štapa na udaljenosti x od gornjeg kraja iznosi $b = b_1 - x \cdot \mathrm{tg}\, 2\alpha$, pa je površina poprečnog presjeka

$$A = bh = b_1 h\left(1 - \frac{x}{b_1} \mathrm{tg}\, 2\alpha\right).$$

Kako je

$$\mathrm{tg}\, 2\alpha = \frac{b_1 - b_2}{l} = \frac{9}{10}\frac{b_1}{l},$$

bit će

$$l = \frac{9 b_1}{10\, \mathrm{tg}\, 2\alpha} = 64{,}04 \text{ cm}.$$

Označimo li površinu presjeka gornjeg kraja štapa s $A_1 = b_1 h$, bit će

$$A = A_1\left(1 - \frac{9}{10}\frac{x}{l}\right).$$

Uzdužna je sila u štapu konstantna i iznosi $N = F$, pa izraz za naprezanje σ_x glasi

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{F}{A_1} \frac{1}{1 - \frac{9}{10}\frac{x}{l}}.$$

Pomak u dobit ćemo pomoću izraza (7.13), tj.

$$N = AE\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = F$$

$$\mathrm{d}u = \frac{F}{AE}\mathrm{d}x = \frac{F}{EA_1}\frac{\mathrm{d}x}{1 - \frac{9}{10}\frac{x}{l}}.$$

Nakon integriranja bit će

$$u = \frac{F}{EA_1}\int \frac{\mathrm{d}x}{1 - \frac{9}{10}\frac{x}{l}} + C$$

$$u = -\frac{10F}{9EA_1}\ln\left(1 - \frac{9x}{10}\right) + C.$$

Kako je $u=0$ za $x=0$, bit će $C=0$. Pomak donjeg kraja jednak je produljenju štapa, tj.

$$u_{max} = \Delta l = -\frac{10Fl}{9EA_1}\ln\frac{1}{10} = 2{,}558\frac{Fl}{EA_1}.$$

Nakon uvrštavanja konkretnih podataka dobit ćemo

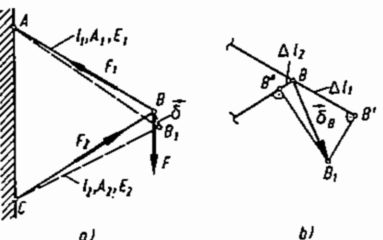
$$\Delta l = 0{,}3203 \text{ mm}.$$

7.3. Plan pomaka

Objasnit ćemo metodu određivanja pomaka čvorova konstrukcija sastavljenih od štapova. Na slici 7.8 prikazana je konstrukcija koja se sastoji od dva štapa. Nakon opterećenja silom F u štapovima će se pojaviti sile F_1 i F_2 koje izazivaju produljenja štapova Δl_1 i Δl_2. Sile F_1 i F_2 možemo odrediti iz uvjeta ravnoteže točke B, a zatim pomoću izraza (7.7a) i produljenja

$$\Delta l_1 = \frac{F_1 l_1}{A_1 E_1}, \qquad \Delta l_2 = -\frac{F_2 l_2}{A_2 E_2}.$$

Vidimo da se štap AB produljio, a štap BC skratio. Pomak točke B odredit ćemo slijedećim razmatranjem: Zamislimo da štapovi nisu spojeni u točki B, ali da su ostali paralelni s prvobitnim položajem i da su opterećeni silama F_1 i F_2 (koje smo dobili iz uvjeta ravnoteže). Pod djelovanjem tih sila štap AB će se produljiti i njegov kraj će doći u točku B', dok će se štap CB skratiti, pa će njegov kraj doći točku B'', kako je prikazano na slici 7.8b. Budući da su produljenja Δl_1 i Δl_2 mnogo manja od l_1 i l_2, slika 7.8b nacrtana je u mnogo većem mjerilu od slike 7.8a (približno 1000 puta).



Slika 7.8. Plan pomaka

Zamislimo sada da štap CB okrećemo oko zgloba C, a štap AB oko zgloba A dok se točke B' i B'' ne poklope u položaju B_1. Pri tome točka B' opisuje luk $\widehat{B'B_1}$, a točka B'' luk $\widehat{B''B_1}$. Kako su polumjeri AB i CB vrlo veliki, štapovi će se okrenuti za vrlo mali kut, pa lukove možemo zamijeniti s pravcem $B'B_1$ koji je okomit na AB i pravcem $B''B_1$ koji je okomit na CB. Spojnica $\overrightarrow{BB_1} = \vec{\delta}$ predstavlja pomak točke B. Deformirani oblik konstrukcije prikazan je na slici 7.8a crtkano, pri čemu je pomak BB_1 prikazan pretjerano velik da bi slika bila jasnija.

PRIMJER 7.4

Dva štapa AB i BC spojena su prema slici 7.9a, i opterećena silom F. Odrediti pomak točke B pod djelovanjem sile F. Zadano: $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$, poprečni presjek štapova $A = 10\,\text{cm}^2$, $l = 2\,\text{m}$, $E = 200\,\text{GPa}$, $F = 150\,\text{kN}$.

Da bismo odredili pomak točke B, koji ćemo označiti s δ, treba odrediti produljenja Δl_1 i Δl_2 štapova AB i BC, a za to je potrebno odrediti sile F_1 i F_2 u

štapovima. Njih ćemo odrediti razmatranjem uvjeta ravnoteže točke B, prema slici 7.9b. Ti uvjeti glase:

$$\Sigma F_x = F - F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\beta = 0$$

$$\Sigma F_y = -F_1 \cos\alpha - F_2 \cos\beta = 0.$$

Odavde lako možemo dobiti da je

$$F_1 = F\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = 0{,}7321 \cdot F = 109{,}8\,\text{kN}$$

$$F_2 = -F\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = 0{,}8966 \cdot F = -134{,}5\,\text{kN}.$$

Promjene duljine štapova iznose:

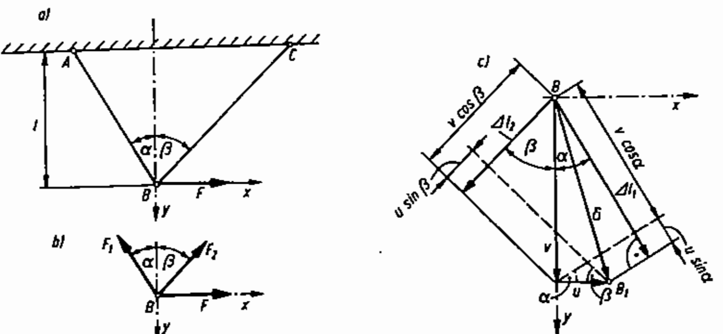
$$\Delta l_1 = \frac{F_1 l}{AE\cos\alpha} = 1{,}268\,\text{mm}$$

$$\Delta l_2 = -\frac{F_2 l}{AE\cos\beta} = -1{,}902\,\text{mm}.$$

Pomak $\delta = \overline{BB_1}$ rastavit ćemo u dvije komponente: u i v, prema slici 7.9c. Ako projiciramo komponente u i v na smjer štapova AB i BC, dobit ćemo

$$\Delta l_1 = u\sin\alpha + v\cos\alpha$$

$$\Delta l_2 = -u\sin\beta + v\cos\beta.$$



Slika 7.9

Kad uvrstimo stvarne vrijednosti u gornje jednadžbe, dobit ćemo

$$0{,}5\,u + 0{,}8660\,v = 1{,}268$$

$$-0{,}7071\,u + 0{,}7071\,v = -1{,}902.$$

Rješenje tih jednadžbi glasi: $u = 2{,}6335\,\text{mm}$; $v = -0{,}0563\,\text{mm}$.

Pomak točke δ iznosi

$$\delta = \sqrt{u^2 + v^2} = 2{,}634\,\text{mm}.$$

Tijelo na koje djeluju vanjske sile bit će u ravnoteži ako su ispunjeni uvjeti:

$$\vec{F}=\Sigma\vec{F}_i=0, \qquad \vec{M}=\Sigma\vec{M}_i=0,$$

gdje je $\vec{F}$ rezultanta, a $\vec{M}$ rezultirajući moment svih vanjskih sila uključujući i reakcije veza. Ti uvjeti u skalarnom obliku glase:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x=0 \qquad \Sigma M_x=0 \\ \Sigma F_y=0 \qquad \Sigma M_y=0 \\ \Sigma F_z=0 \qquad \Sigma M_z=0, \end{aligned} \tag{7.17}$$

što možemo izraziti riječima: Da bi tijelo pod djelovanjem proizvoljnog sistema sila bilo u ravnoteži, nužno je i dovoljno da zbroj projekcija svih sila na proizvoljne odabrane koordinatne osi i zbroj momenata svih sila oko tih koordinatnih osi bude jednak nuli. Prva tri izraza (7.17) nazivaju se jednadžbe sila, a druga tri jednadžbe momenata. Bilo koju od jednadžbi sila smijemo zamijeniti dopunskim jednadžbama momenata; međutim, ni jednu od jednadžbi momenata ne možemo zamijeniti dopunskim jednadžbama sila. Pri zamjeni jednadžbi sila s dopunskim jednadžbama momenata moramo se držati određenih pravila. Inače se može dogoditi da dobiveni uvjeti ravnoteže ne budu međusobno nezavisni. Uvjeti ravnoteže koji nemaju oblik (7.17) nazivaju se posebni uvjeti ravnoteže. Ovdje navodimo neke od njih bez dokaza:

- Prostorna grupa sila jest u ravnoteži ako je zbroj momenata svih sila oko šest bridova tetraedra jednak nuli.
- Ravninska grupa sila jest u ravnoteži ako je rezultirajući moment oko tri točke koje ne leže na jednom pravcu jednak nuli.
- Ravninska grupa sila jest u ravnoteži ako su rezultirajući momenti oko točaka A i B jednaki nuli i ako je zbroj projekcija svih sila na bilo koju os, koja nije okomita na pravac AB, jednak nuli.

U nauci o čvrstoći susretat ćemo se vrlo često s ravninskim konstrukcijama za koje možemo postaviti tri nezavisna uvjeta ravnoteže:

$$\Sigma F_x=0, \qquad \Sigma F_y=0 \qquad \text{i} \qquad \Sigma M_0=0. \tag{7.18}$$

Pri postavljanju uvjeta ravnoteže ravninskog sistema sila možemo upotrijebiti dvije odnosno tri jednadžbe momenata. U prvom slučaju uvjeti ravnoteže glase:

$$\Sigma M_A=0, \qquad \Sigma M_B=0, \qquad \Sigma F_x=0, \tag{7.19}$$

gdje os x ne smije biti okomita na pravac AB. Ako upotrijebimo tri momentne jednadžbe, uvjeti ravnoteže glase:

$$\Sigma M_A=0, \qquad \Sigma M_B=0 \qquad \text{i} \qquad \Sigma M_C=0, \tag{7.20}$$

pri čemu točke A, B i C ne smiju ležati na jednom pravcu.

Ako na nekoj konstrukciji imamo k nepoznatih reakcija veza ili nepoznatih sila, a konstrukcija ima s stupnjeva slobode gibanja, stupanj statičke neodređenosti n određen je izrazom

$$n=k-s. \tag{7.21}$$

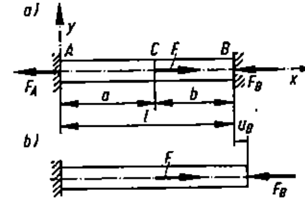
Da bismo mogli riješiti n puta statički neodređen problem, moramo postaviti n dopunskih uvjeta deformacije. Dopunske uvjete deformacije postavljamo geometrijskom analizom načina deformiranja tijela. Pojedini dijelovi konstrukcija moraju se pomicati zajedno, odnosno pojedine točke konstrukcije ostaju nepomične (najčešće točke u osloncima) u toku deformiranja tijela. Npr. ako se više štapova sastaje u nekom čvoru, uvjet deformacije jest da se krajevi svih štapova pomiču zajedno.

Moguće je uvijek postaviti potreban broj nezavisnih dopunskih uvjeta deformacije koji zajedno s uvjetima ravnoteže daju dovoljan broj jednadžbi za rješavanje statički neodređenog problema. Pri rješavanju statički neodređenih zadataka treba *iskoristiti sve raspoložive nezavisne uvjete ravnoteže*, pa tek onda dopunske uvjete deformacije.

Pri postavljanju uvjeta deformacije često se služimo *metodom superpozicije*. Ako je neko tijelo opterećeno s više sila, pomak neke točke možemo odrediti tako da odredimo pomak te točke pod djelovanjem svake pojedinačne sile, a rezultat zbrojimo. Taj se postupak zove metoda superpozicije i *smije se upotrijebiti samo za linearnoelastične konstrukcije*, tj. takve konstrukcije kod kojih pomaci linearno ovise o opterećenju. U Nauci o čvrstoći I i II susretat ćemo se uglavnom s takvim konstrukcijama. Ovdje ćemo se ograničiti na rješavanje statički neodređenih konstrukcija sastavljenih od štapova koji su opterećeni samo aksijalno. S problematikom i metodama rješavanja statički neodređenih konstrukcija upoznat ćemo se detaljnije u Nauci o čvrstoći II. Postupak rješavanja statički neodređenih problema objasnit ćemo pomoću nekoliko riješenih primjera.

PRIMJER 7.5

Elastični štap konstantnog poprečnog presjeka i duljine $l=a+b$ učvršćen je između dvije krute i nepomične stijenke, prema slici 7.10. U točki C štap je opterećen silom F. Treba naći reakcije u A i B, ako je zadano: F, a, b.



Slika 7.10. Statički neodređen štap

Uvjeti ravnoteže. Oslobodit ćemo štap veza dodavanjem nepoznatih reakcija veza F_A i F_B koje zamjenjuju djelovanje nepomičnih stijenki. Budući da se radi o ravninskom problemu, možemo u principu postaviti tri uvjeta ravnoteže:

$$\Sigma F_x=F-F_A-F_B=0 \tag{a}$$

$$\Sigma F_y = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$\Sigma M_A = 0. \qquad \text{(c)}$$

Drugi i treći uvjet ravnoteže automatski su zadovoljeni jer sile nemaju komponenata u smjeru osi y, a rezultirajući moment je jednak nuli jer su sve sile kolinearne, a rezultanta im je jednaka nuli. Ubuduće pri rješavanju takvih zadataka nećemo ni postavljati uvjete ravnoteže koji su automatski zadovoljeni jer ne doprinose rješavanju problema. Prema tome, imamo na raspolaganju samo jedan uvjet ravnoteže (a) i dvije nepoznanice, pa je potrebno postaviti još jedan dopunski uvjet deformacije.

Uvjeti deformacije. Kao uvjet deformacije možemo uzeti činjenicu da krajevi štapa pri deformiranju ostaju nepomični, tj. $u_A = 0$ ili $u_B = 0$. Odlučimo se za ovaj drugi. U tu svrhu oslobodimo kraj B veza dodavanjem sile F_B. Sila F_B mora imati takav iznos da je pomak kraja B jednak nuli. Primijenit ćemo princip superpozicije. Zamislit ćemo da djeluje na štap samo sila F, pri čemu nastaje pomak u'_B, a zatim sila F_B, pri čemu nastaje pomak u''_B. Ukupni pomak kraja B u tom slučaju iznosi

$$u_B = u'_B + u''_B = 0. \qquad \text{(d)}$$

Lako se možemo uvjeriti da je

$$u'_B = u'_C = \frac{Fa}{AE}. \qquad \text{(e)}$$

Pomak kraja B pod djelovanjem samo sile F_B iznosi

$$u''_B = -\frac{F_B l}{AE}. \qquad \text{(f)}$$

Predznak je negativan jer se točka B u tom slučaju pomiče ulijevo, tj. suprotno od pozitivnog smjera osi x. Uvrstimo li izraze (e) i (f) u (d), dobit ćemo

$$\frac{Fa}{AE} - \frac{F_B l}{AE} = 0,$$

odnosno

$$F_B = F\frac{a}{l}. \qquad \text{(g)}$$

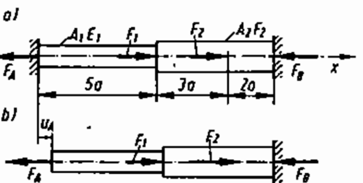
Uvrstimo li izraz (g) u (a) i uzmemo li u obzir da je $a + b = l$, bit će

$$F_A = F\frac{b}{l}.$$

Vidimo da za izračunavanje reakcija nije potrebno poznavati aksijalnu krutost AE jer se ona u postupku rješavanja zadataka krati. Ako je $a = b = l/2$, bit će $F_A = F_B = F/2$, što smo mogli zaključiti iz uvjeta simetrije. Što je manji a, sila F_A je veća, a sila F_B manja i obratno.

PRIMJER 7.6

Sastavljeni štap zadan je i opterećen prema slici 7.11. Naći reakcije F_A i F_B ako je zadano: a, $F_2 = 2F_1 = 2F$, $A_2 = 2A_1 = 2A$, $E_2 = E_1 = E$.



Slika 7.11

Uvjet ravnoteže.

$$\Sigma F_x = -F_A - F_B + F_1 + F_2 = 0 \qquad \text{(a)}$$

Ostale uvjete ravnoteže nije potrebno postavljati.

Uvjet deformacije. Kako imamo jedan uvjet ravnoteže a dvije nepoznanice: F_A i F_B, potrebno je postaviti još jedan uvjet deformacije. U principu je svejedno da li ćemo kao uvjet deformacije uzeti $u_B = 0$, $u_A = 0$ ili neki drugi; međutim, uvjet $u_A = 0$ zahtijeva najmanje numeričkog rada, u što se student može lako uvjeriti riješivši taj zadatak primjenom uvjeta $u_B = 0$. Mi ćemo riješiti zadatak primjenom uvjeta $u_A = 0$:

$$u_A = u'_A + u''_A + u'''_A = 0$$

$$u_A = -\left(\frac{F_A\,5a}{AE} + \frac{F_A\,5a}{2AE}\right) + \frac{F_1\,5a}{2AE} + \frac{F_2\,2a}{2AE} = 0. \qquad \text{(b)}$$

Prvi član, odnosno zagrada u izrazu (b) predstavlja pomak koji izaziva sila F_A, drugi je član pomak koji izaziva sila F_1, a treći član pomak koji izaziva sila F_2. Skratimo li izraz (b) s a/AE, dobit ćemo, nakon sređivanja,

$$F_A = \frac{3}{5}F,$$

a zatim pomoću izraza (a)

$$F_B = \frac{12}{5}F.$$

PRIMJER 7.7

Kruta ploča $ABCD$ vezana je pomoću dva elastična štapa i nepomičnog zgloba A i opterećena silom F, prema slici 7.12a. Naći reakcije veza i pomak točke B, ako je zadano: F, AE.

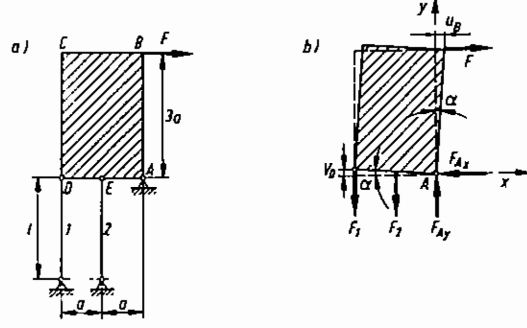
Uvjeti ravnoteže. Na slici 7.12b prikazana je ploča oslobođena veza. Osim aktivne sile F djeluju sile u štapovima F_1 i F_2 i sila u zglobu F_A. Smjer sile F_A nepoznat je,

pa je rastavljamo u dvije komponente: F_{Ax} i F_{Ay}. Sile F_1 i F_2 djeluju u smjeru štapova 1 i 2. Uvjeti ravnoteže ploče glase

$$\Sigma F_x = F - F_{Ax} = 0 \quad (a)$$

$$\Sigma F_y = F_{Ay} - F_1 - F_2 = 0 \quad (b)$$

$$\Sigma M_A = -F\,3a + F_2\,a + F_1\,2a = 0. \quad (c)$$



Slika 7.12. Kruta ploča s jednom prekobrojnom vezom

Uvjeti deformacije. Kako je ploča kruta, točke A, E i D ležat će na jednom pravcu i nakon deformiranja. Taj će se pravac zakrenuti za kut α, kako je prikazano na slici 7.12b. Kut α je vrlo malen jer su i produljenja štapova malena. Odavde možemo zaključiti da pomaci točaka E i D iznose

$$v_E = a\,\alpha = \Delta l_2 \quad (d)$$

$$v_D = 2a\,\alpha = \Delta l_1, \quad (e)$$

odnosno da je

$$\Delta l_1 = 2\Delta l_2. \quad (f)$$

Kako je

$$\Delta l_1 = \frac{F_1 l}{AE} \quad \text{i} \quad \Delta l_2 = \frac{F_2 l}{AE}, \quad (g)$$

izraz (f) prelazi u

$$F_1 = 2F_2. \quad (h)$$

Rješenjem jednadžbi (a, b, c i h) dobit ćemo

$$F_1 = \frac{6}{5}F, \; F_2 = \frac{3}{5}F, \; F_{Ay} = \frac{9}{5}F, \; F_{Ax} = F.$$

Pomak točke B je horizontalan i iznosi

$$u_B = 3a\alpha. \quad (i)$$

Iz izraza (f) i (e) izlazi

$$\alpha = \frac{\Delta l_1}{2a} = \frac{F_1 l}{2a\,AE} = \frac{6}{10}\frac{Fl}{a\,AE},$$

što uvršteno u izraz (i) daje

$$u_B = \frac{9}{5}\frac{Fl}{AE}.$$

PRIMJER 7.8

Kruta greda ABC vezana je pomoću tri elastična štapa: 1, 2 i 3, i opterećena silom F, prema slici 7.13a. Naći sile u štapovima i pomak točke D. Zadano: l, F, AE.

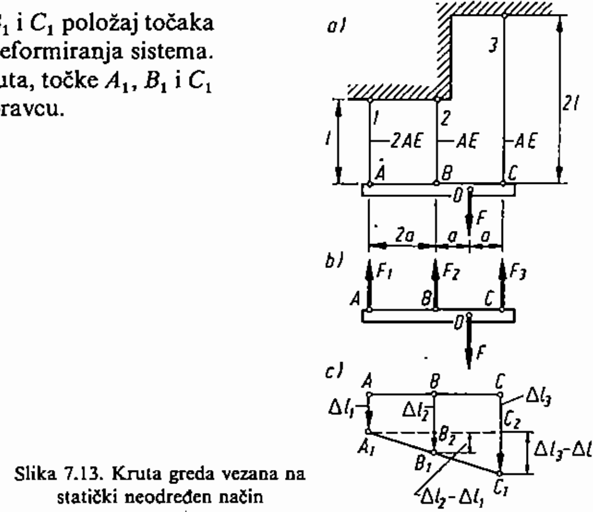
Greda oslobođena veza s ucrtanim reakcijama prikazana je na slici 7.13b. Uvjeti ravnoteže grede glase:

$$\Sigma F_y = F_1 + F_2 + F_3 - F = 0 \quad (a)$$

$$\Sigma M_B = F_3 2a - F_1 2a - Fa = 0. \quad (b)$$

Kako imamo dva nezavisna uvjeta ravnoteže, a tri nepoznate reakcije, sistem je jedanput statički neodređen. Potrebno je postaviti još jedan dopunski uvjet deformacije. Taj ćemo uvjet postaviti pomoću slike 7.13c.

Označimo s A_1, B_1 i C_1 položaj točaka A, B i C nakon deformiranja sistema. Kako je greda kruta, točke A_1, B_1 i C_1 leže na jednom pravcu.



Slika 7.13. Kruta greda vezana na statički neodređen način

Iz sličnosti trokuta $A_1B_1B_2$ i $A_1C_1C_2$ slijedi

$$\frac{\Delta l_2 - \Delta l_1}{2a} = \frac{\Delta l_3 - \Delta l_1}{4a}, \quad (c)$$

odnosno

$$2\Delta l_2 = \Delta l_1 + \Delta l_3. \quad (d)$$

Produljenja iznose

$$\Delta l_1 = \frac{F_1 l}{2AE} \qquad \Delta l_2 = \frac{F_2 l}{AE} \qquad \Delta l_3 = \frac{F_3 2l}{AE}. \quad (e)$$

Ako uvrstimo izraze (e) u (c) i skratimo s l/AE, dobit ćemo

$$2F_2=\frac{1}{2}F_1+2F_3. \tag{f}$$

Rješenjem sistema jednadžbi (a), (b) i (f) dobit ćemo

$$F_1=0, \qquad F_2=\frac{1}{2}F, \qquad F_3=\frac{1}{2}F,$$

što uvršteno u (e) daje

$$\Delta l_1=0, \qquad \Delta l_2=\frac{Fl}{2AE}, \qquad \Delta l_3=\frac{Fl}{AE}.$$

Pomak točke D iznosi

$$v_D=\frac{1}{2}(\Delta l_3+\Delta l_2)=\frac{3}{4}\frac{Fl}{AE}.$$

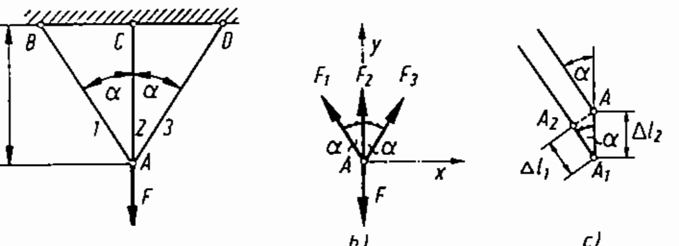
PRIMJER 7.9

Konstrukcija sastavljena od tri elastična štapa jednake krutosti AE, prema slici 7.14a, opterećena je silom F. Naći sile u štapovima ako je zadano: F, l, AE, α.

Na slici 7.14b prikazan je oslobođen čvor A. Uvjeti ravnoteže čvora A glase

$$\Sigma F_y=F_1\cos\alpha+F_3\cos\alpha+F_2-F=0 \tag{a}$$

$$\Sigma F_x=-F_1\sin\alpha+F_3\sin\alpha=0. \tag{b}$$



Slika 7.14. Statički neodređena štapna konstrukcija

Iz uvjeta (b) dobivamo $F_1=F_3$. Do istog smo zaključka mogli doći lakše, koristeći svojstvo simetrije. Izraz (a) možemo sada preinačiti u

$$2F_1\cos\alpha+F_2=F. \tag{c}$$

Potreban nam je još jedan dopunski uvjet deformacije koji ćemo postaviti pomoću slike 7.14c. Slika prikazuje detalj deformirane konstrukcije oko točke A. Nakon opterećenja točka A će se pomaknuti u novi položaj A_1. Budući da je dužina AA_1 mnogo manja od dužine AC (oko 100 do 1000 puta za metalne štapove), kut α neće se bitno promijeniti. Dužina AB jednaka je dužini $\overline{A_2B}$, pa je $\overline{A_2A_1}$ jednako produljenju štapa 1. tj.

$$\Delta l_1=\Delta l_3=\overline{A_1A_2}.$$

Prema tome, uvjet deformacije glasi

$$\Delta l_2\cos\alpha=\Delta l_1. \tag{d}$$

Kako je

$$\Delta l_2=\frac{F_2 l}{EA} \quad \text{i} \quad \Delta l_1=\frac{F_1 l/\cos\alpha}{EA},$$

Izraz (d) prelazi u

$$\frac{F_2 l}{EA}\cos\alpha=\frac{F_1 l/\cos\alpha}{EA},$$

odnosno

$$F_2\cos^2\alpha=F_1. \tag{e}$$

Uvrstimo li izraz (e) u (c), dobit ćemo

$$2F_2\cos^3\alpha+F_2=F,$$

odnosno

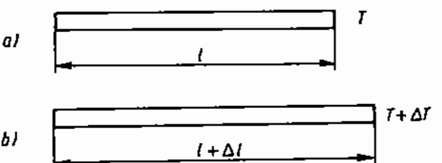
$$F_2=\frac{F}{1+2\cos^3\alpha}.$$

Sile F_1 i F_3 iznose:

$$F_1=F_3=F\frac{\cos^2\alpha}{1+2\cos^3\alpha}.$$

7.5. Toplinska i početna naprezanja

Tijela se deformiraju ne samo pod djelovanjem sila nego i pri promjeni temperature, vlažnosti, kemijskim reakcijama itd. Pri tome mogu nastati samouravnotežene unutrašnje sile, odnosno naprezanja koja nisu posljedica vanjskog opterećenja. Ta naprezanja mogu biti vrlo opasna jer se teško otkrivaju. Pri opterećenju konstrukcije zbrajaju se početna naprezanja s naprezanjima koje izaziva opterećenje.



Slika 7.15. Toplinsko rastezanje štapa

Zbog tih naprezanja može nastati lom konstrukcije, iako je naprezanje koje potječe od opterećenja manje od dopuštenog. Pojavu toplinske deformacije objasnit ćemo pomoću slike 7.15. Štap na slici 5.15a ima pri temperaturi T duljinu l. Ugrijemo li štap na temperaturu $T+\Delta T$, produljit će se za iznos

$$\Delta l_T=\alpha l\Delta T, \tag{7.22}$$

gdje je α koeficijent toplinskog rastezanja, a ΔT promjena temperature. Eksperimenti pokazuju da se koeficijent α može smatrati konstantnim pri malim promjenama temperature (ΔT=100 do 200 °C). Vrijednosti koeficijenta toplinskog rastezanja

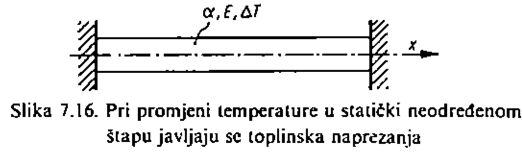
za neke materijale pri sobnoj temperaturi navedene su u tablici 6.1. Podijelimo li izraz (7.22) s l, dobit ćemo

$$\varepsilon_T=\frac{\Delta l_T}{l}=\alpha\Delta T, \tag{7.23}$$

gdje je ε_T duljinska deformacija izazvana promjenom temperature. Ako je štap istovremeno opterećen i ugrijan, deformacija iznosi

$$\varepsilon_x=\frac{\sigma_x}{E}+\alpha\Delta T. \tag{7.24}$$

Spriječimo li širenje štapa potpuno ili djelomično, u njemu će se pojaviti toplinska naprezanja. Zamislimo štap koji je učvršćen bez prednaprezanja između dvije krute i nepomične stijenke, prema slici 7.16. Promijenimo li štapu temperaturu



Slika 7.16. Pri promjeni temperature u statički neodređenom štapu javljaju se toplinska naprezanja

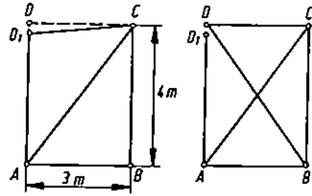
za ΔT, on će nastojati promijeniti duljinu, što je nemoguće jer su stijenke nepomične. Zbog toga se u njemu javlja tlačno naprezanje. Ukupna deformacija jednaka je nuli, tj.

$$\varepsilon_x=\alpha\Delta T+\frac{\sigma_x}{E}=0.$$

Odavde je

$$\sigma_x=-\alpha E\Delta T. \tag{7.25}$$

Pri pozitivnom ΔT, tj. pri povišenju temperature, naprezanje je u štapu negativno, tj. tlačno, a pri smanjenju temperature naprezanje će u štapu biti vlačno.



Slika 7.17. Montažna naprezanja mogu nastati samo u statički neodređenim konstrukcijama

Toplinska, početna i montažna naprezanja mogu se pojaviti u štapnim konstrukcijama samo ako su one statički neodređene (ovdje ne uzimamo u obzir savijanje i uvijanje štapova). To ćemo objasniti pomoću slike 7.17 koja prikazuje dvije konstrukcije sastavljene od štapova duljine 3, 4 i 5 m. Lijeva konstrukcija statički je određena, a desna je statički neodređena.

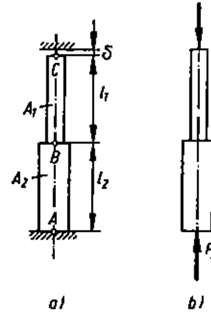
Neka su svi štapovi izrađeni po mjeri osim štapa AD koji je za nekoliko milimetara kraći od 4 m. Kod statički određene konstrukcije možemo bez teškoća montirati trokut ABC. Štap DC postavimo paralelno sa štapom AB, a štap AD paralelno sa štapom BC. Kako je štap AD kraći, njegov kraj se neće podudarati s krajem štapa CD. Međutim, malim zakretanjem štapa CD oko C možemo poklopiti krajeve ta dva štapa i završiti montažu konstrukcije. Pri tome montirana konstrukcija neće imati predviđeni oblik, ali se u štapovima neće pojaviti naprezanja.

U statički neodređenoj konstrukciji, prema slici 7.17b, situacija je potpuno drugačija. Montiranje štapova AB, BC, CD i dijagonala AC i BD možemo izvršiti bez primjene sile. Štap AD_1 je kraći pa se njegov kraj ne podudara s čvorom D. Da bismo spojili kraj D_1 s čvorom D, moramo rastegnuti štap AD za iznos DD_1 i zatim završiti montiranje. Kad popustimo silu kojom smo rastegnuli štap AD, u dijagonalama će se pojaviti tlačna naprezanja, a u ostalim štapovima vlačna.

Slična je situacija i pri nejednolikom rastezanju ili skupljanju zbog promjene temperature. Ako se u statički određenoj konstrukciji jedan štap razmjerno više rastegne, konstrukcija će neznatno promijeniti oblik, dok će nejednoliko rastezanje jednog štapa u statički neodređenoj konstrukciji izazvati pojavu toplinskih naprezanja.

PRIMJER 7.10

Štap na slici 7.18 sastoji se od dva dijela duljine l_1 i l_2, a postavljen je između dvije krute nepomične stijenke s malom zračnošću δ.



Slika 7.18

Odrediti:

a) potrebno povišenje temperature ΔT_1, pri kome će štap upravo dodirnuti drugu stijenku,

b) naprezanja σ_1 i σ_2 koja će se pojaviti u štapu pri povišenju temperature za $\Delta T_2>\Delta T_1$.

Zadano: α_1, E_1, A_1, l_1, $\alpha_2=2\alpha_1$, $E_2=E_1/2$, $A_2=3A_1$, $l_2=l_1$.

a) Dok štap ne dodirne drugu stijenku, u njemu se ne mogu pojaviti naprezanja, pa ukupno produljenje nastaje samo zbog porasta temperature, tj.

$$\Delta l = \Delta l_{1T} + \Delta l_{2T} = \delta$$

$$\Delta l = (\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2)\,\Delta T_1 = \delta. \qquad \text{(a)}$$

Odavde je

$$\Delta T_1 = \frac{\delta}{\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2}. \qquad \text{(b)}$$

b) U tom slučaju promjena duljine nastaje kako zbog promjene temperature tako i zbog naprezanja, tj.

$$\Delta l = \Delta l_{1\sigma} + \Delta l_{1T} + \Delta l_{2\sigma} + \Delta l_{2T} = \delta. \qquad \text{(c)}$$

Indeks σ odnosi se na produljenje zbog naprezanja, a indeks T na produljenje zbog temperature. Pomoću izraza (7.6) i (7.22) izraz (c) postaje

$$\frac{\sigma_1}{E_1} l_1 + \alpha_1 l_1 \Delta T_2 + \frac{\sigma_2}{E_2} l_2 + \alpha_2 l_2 \Delta T_2 = \delta. \qquad \text{(d)}$$

U tom se izrazu pojavljuju dvije nepoznanice: σ_1 i σ_2, pa je potrebno postaviti još jednu jednadžbu. Uvjet ravnoteže štapa prema slici 7.18b glasi:

$$\Sigma F_y = F_A - F_C = 0.$$

Kako je $F_A = \sigma_2 A_2$ i $F_C = \sigma_1 A_1$, bit će

$$\sigma_1 A_1 = \sigma_2 A_2. \qquad \text{(e)}$$

Istovremenim rješavanjem jednadžbi (d) i (e) dobit ćemo

$$\sigma_2 \frac{A_2}{A_1}\frac{l_1}{E_1} + \frac{\sigma_2}{E_2} l_2 = \delta - (\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2)\,\Delta T_2.$$

Uzmemo li u obzir izraz (a), bit će

$$\sigma_2 \left(\frac{1}{A_1 E_1} + \frac{2}{A_2 E_2}\right) = \frac{(\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2)(\Delta T_2 - \Delta T_1)}{A_2},$$

odnosno

$$\sigma_2 \frac{l_2}{A_2 E_2}\left(1 + \frac{A_2 E_2 l_1}{A_1 E_1 l_2}\right) = \alpha_2 \frac{l_2}{A_2}\left(1 + \frac{\alpha_1 l_1}{\alpha_2 l_2}\right)\Delta T,$$

gdje je $\Delta T = \Delta T_2 - \Delta T_1$ porast temperature od trenutka kad je štap dotakao drugu stijenku. Sređivanjem gornjeg izraza možemo dobiti

$$\sigma_2 = \alpha_2 E_2 \Delta T \frac{1 + \dfrac{\alpha_1 l_1}{\alpha_2 l_2}}{1 + \dfrac{A_2 E_2 l_1}{A_1 E_1 l_2}}.$$

Uvrštavanjem konkretnih vrijednosti dobit ćemo

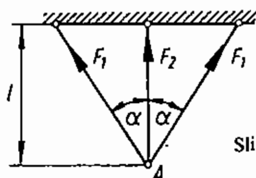
$$\sigma_2 = \frac{3}{5}\sigma_1 E_1 \Delta T, \qquad \sigma_1 = \frac{9}{5}\alpha_1 E_1 \Delta T.$$

PRIMJER 7.11

Konstrukcija je, prema slici 7.19, sastavljena od tri štapa. Odrediti toplinska naprezanja u konstrukciji pri promjeni temperature za ΔT u dva slučaja:

a) Sva tri štapa izrađena su od istog materijala, s koeficijentom toplinskog rastezanja α i modulom elastičnosti E.

b) Materijal dvaju krajnjih štapova ima modul elastičnosti E_1 i koeficijent toplinskog rastezanja α_1, a materijal srednjeg štapa E_2 i α_2.



Slika 7.19. Statički neodređena konstrukcija podvrgnuta promjeni temperature

Zbog simetrije sile su u krajnjim štapovima jednake pa ćemo ih označiti s F_1, a silu u srednjem štapu s F_2. Očito je iz uvjeta ravnoteže da sile F_1 i sila F_2 trebaju biti suprotnog predznaka, ali budući da ne znamo unaprijed koja će sila biti vlačna, a koja tlačna, pretpostavit ćemo da su sve sile vlačne, kao što je prikazano na slici 7.19. Uvjet ravnoteže glasi

$$2F_1 \cos\alpha + F_2 = 0. \qquad \text{(a)}$$

Kako je $F_1 = A\sigma_1$ i $F_2 = A\sigma_2$, izraz (a) možemo pisati u obliku

$$2\sigma_1 \cos\alpha + \sigma_2 = 0. \qquad \text{(b)}$$

Uvjet deformacije isti je kao i u primjeru 7.9, tj.

$$\Delta l_2 \cos\alpha = \Delta l_1. \qquad \text{(c)}$$

a) Materijal sva tri štapa je jednak.

U tom je slučaju

$$\Delta l_1 = \frac{\sigma_1 l}{E\cos\alpha} + \alpha\Delta T \frac{l}{\cos\alpha}$$

$$\Delta l_2 = \frac{\sigma_2}{E} l + \alpha \Delta T l,$$

što uvršteno u izraz (c) daje

$$\left(\frac{\sigma_2}{E} + \alpha\Delta T\right)\cos^2\alpha = \frac{\sigma_1}{E} + \alpha\Delta T. \qquad \text{(d)}$$

Iz izraza (b) možemo dobiti

$$\sigma_2 = -2\sigma_1 \cos\alpha. \tag{e}$$

Ako gornji izraz uvrstimo u (d), dobit ćemo

$$\left(-\frac{\sigma_1}{E} 2\cos^2\alpha + \alpha \Delta T\right)\cos\alpha = \frac{\sigma_1}{E} + \alpha \Delta T,$$

odnosno

$$\sigma_1 (1 + 2\cos^3\alpha) = -\alpha E \Delta T (1 - \cos^2\alpha).$$

Odavde je

$$\sigma_1 = -\alpha E \Delta T \frac{1-\cos^2\alpha}{1+2\cos^3\alpha}. \tag{f}$$

Pomoću izraza (e) i (f) dobit ćemo

$$\sigma_2 = 2\alpha E \Delta T \frac{\cos\alpha - \cos^3\alpha}{1+2\cos^3\alpha}.$$

b) Materijal srednjeg štapa razlikuje se od materijala ostalih dvaju štapova.

U tom je slučaju

$$\Delta l_1 = \frac{\sigma_1}{E_1}\frac{l}{\cos\alpha} + \alpha_1 \Delta T \frac{l}{\cos\alpha}$$

$$\Delta l_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} l + \alpha_2 \Delta T,$$

što uvršteno u uvjet deformacije daje

$$\left(\frac{\sigma_2}{E_2} + \alpha_2 \Delta T\right)\cos^2\alpha = \frac{\sigma_1}{E_1} + \alpha_1 \Delta T. \tag{g}$$

Ako uvrstimo izraz (e) u (g), dobit ćemo

$$\left(-\frac{\sigma_1}{E_2} 2\cos\alpha + \alpha_2 \Delta T\right)\cos^2\alpha = \frac{\sigma_1}{E_1} + \alpha_1 \Delta T,$$

odnosno

$$\sigma_1\left(\frac{1}{E_1} + \frac{2\cos^3\alpha}{E_2}\right) = (\alpha_2\cos^2\alpha - \alpha_1)\Delta T$$

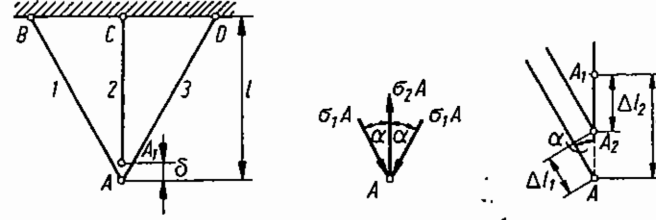
$$\sigma_1 = \frac{(\alpha_2\cos^2\alpha - \alpha_1)}{E_2 + 2E_1\cos^3\alpha} E_1 E_2 \Delta T.$$

Naprezanje σ_2 možemo lako dobiti pomoću izraza (e).

Ako su sva tri štapa od istog materijala i ako se konstrukcija jednoliko grije, u srednjem štapu javljaju se vlačna toplinska naprezanja, a u druga dva štapa tlačna. Kad su štapovi od različitog materijala, može se pri zagrijavanju u srednjem štapu pojaviti tlačno naprezanje, a u preostala dva vlačno. To će biti ako je $\alpha_2 \cos^2\alpha < \alpha_1$. Ako je pak $\alpha_2\cos^2\alpha = \alpha_1$, neće se pojaviti toplinska naprezanja. To objašnjavamo činjenicom što je toplinsko rastezanje štapova upravo takvo da produljenja štapova zadovoljavaju uvjet deformacija.

PRIMJER 7.12

Treba sastaviti konstrukciju od tri štapa jednakog presjeka prema slici 7.20a. Srednji štap ima duljinu $l-\delta$ umjesto l. Odrediti naprezanja u štapovima nakon dovršene montaže.



Slika 7.20. Pojava montažnih naprezanja u statički neodređenoj konstrukciji

Zadano: $l = 2\,\text{m}$, $\delta = 1\,\text{mm}$, $E = 200\,\text{GPa}$, $\alpha = 30°$.

Konstrukciju možemo sastaviti samo ako se srednji štap rastegne, a krajnja dva sabiju. Štapovi će djelovati na čvor A silama kako je prikazano na slici 7.20b. Zbog simetrije je $\sigma_3 = \sigma_1$. Uvjet ravnoteže čvora A glasi

$$2\sigma_1\cos\alpha = \sigma_2, \tag{a}$$

gdje je σ_1 samo apsolutna vrijednost naprezanja. Potrebno je postaviti još i uvjet deformacije koji prema slici 7.20c glasi

$$\Delta l_1/\cos\alpha + \Delta l_2 = \delta. \tag{b}$$

U tom izrazu je Δl_1 apsolutna vrijednost. Kako je

$$\Delta l_1 = \frac{\sigma_1}{E}\frac{l}{\cos\alpha}, \quad \Delta l_2 = \frac{\sigma_2}{E} l,$$

izraz (b) prelazi u

$$\frac{\sigma_1}{E}\frac{l}{\cos^2\alpha} + \frac{\sigma_2}{E} l = \delta,$$

odnosno

$$\sigma_1 + \sigma_2\cos^2\alpha = \frac{\delta}{l} E\cos^2\alpha. \tag{c}$$

Uvrstimo li izraz (a) u (c), dobit ćemo

$$\sigma_1 = E\frac{\delta}{l}\,\frac{\cos^2\alpha}{1+2\cos^3\alpha}$$

$$\sigma_2 = 2E\frac{\delta}{l}\,\frac{\cos^3\alpha}{1+2\cos^3\alpha}. \qquad \text{(d)}$$

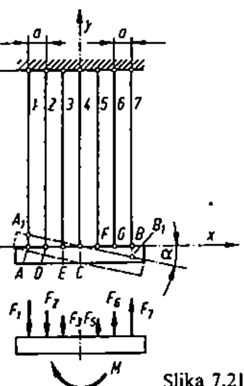
Nakon uvrštavanja konkretnih podataka u izraze (d) naprezanja σ_1 i σ_2 iznose:

$$\sigma_1 = 0{,}3262\,E\frac{\delta}{l} = 32{,}62\ \text{MPa} \quad \text{(sabijanje)}$$

$$\sigma_2 = 0{,}565\,E\frac{\delta}{l} = 56{,}5\ \text{MPa} \quad \text{(rastezanje)}.$$

PRIMJER 7.13

Kruta greda AB vezana je pomoću sedam štapova i opterećena momentom M, prema slici 7.21. Svi štapovi imaju jednaki poprečni presjek, a izrađeni su od istog materijala. Razmak među štapovima je konstantan i iznosi a. Duljina štapova je l. Naći sile u štapovima.



Slika 7.21

Na gredu djeluje sedam nepoznatih sila: $F_1, F_2, \ldots, F_7$. Za njihovo određivanje imamo dvije jednadžbe ravnoteže: $\Sigma F_y = 0$ i $\Sigma M = 0$, tako da je sistem pet puta statički neodređen. Da bismo mogli riješiti problem, moramo osim uvjeta ravnoteže upotrijebiti i uvjet deformacija. Budući da je greda kruta, može se okretati i pomicati u smjeru osi y. Međutim, simetričnost konstrukcije i antisimetričnost opterećenja uvjetuju i antisimetričnost deformacije, tj. srednji štap 4 neće se deformirati, dok će produljenja štapova 1 i 7, 2 i 6, 3 i 5 u parovima biti jednaka po iznosu a suprotna po predznaku. Greda će se okretati oko točke C i zauzeti položaj A_1B_1. Kut zakreta grede označit ćemo s α. Veličina tog kuta za sada nam je nepoznata. Produljenje i-tog štapa iznosi

$$\Delta l_i = x_i \alpha, \qquad \text{(a)}$$

gdje je x_i udaljenost i-tog štapa od osi y i za štapove 1, 2 i 3 iznosi $-3a$, $-2a$ i $-a$. Za štapove 5, 6 i 7 x_i iznosi a, $2a$, odnosno $3a$. Deformacija i-tog štapa jest

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta l_i}{l} = x_i\frac{\alpha}{l}, \qquad \text{(b)}$$

tako da je sila $F_i = A\sigma_i = AE\varepsilon_i$, odnosno

$$F_i = AE\frac{\alpha}{l}x_i. \qquad \text{(c)}$$

Budući da su deformacije u štapovima (a time i naprezanja i sile) 1 i 7, 2 i 6, 3 i 5 jednake po iznosu a suprotne po predznaku, uvjet ravnoteže $\Sigma F_y = 0$ automatski je zadovoljen. Preostali uvjeti ravnoteže dat će nam veličinu kuta α, a zatim pomoću (c) možemo naći pojedinačne vrijednosti sila F_i, odnosno pomoću (a) produljenja Δl_i. Ravnoteža momenata oko C glasi

$$\Sigma M_C = \Sigma x_i F_i - M = 0, \qquad \text{(d)}$$

odnosno nakon uvrštavanja izraza (c) u (d)

$$M = AE\frac{\alpha}{l}\Sigma x_i^2$$

$$M = 2AE\frac{\alpha}{l}[a^2 + (2a)^2 + (3a)^2],$$

što nakon sređivanja daje

$$\alpha = \frac{Ml}{28EAa^2}. \qquad \text{(e)}$$

Uvrstimo li (e) u (c) i (a), dobit ćemo:

$$F_i = \frac{Mx_i}{28a^2}$$

$$\Delta l_i = \frac{Mlx_i}{28EAa^2}. \qquad \text{(f)}$$

Nakon uvrštavanja konkretnih vrijednosti u izraze (f) dobit ćemo:

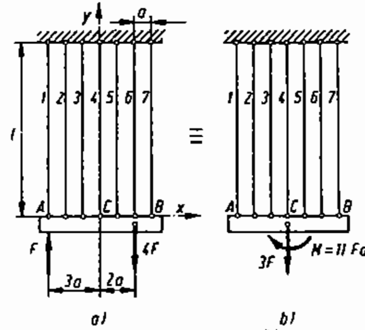
$$F_5 = -F_3 = \frac{M}{28a} \qquad \Delta l_5 = -\Delta l_3 = \frac{Ml}{28EAa}$$

$$F_6 = -F_2 = \frac{2M}{28a} \qquad \Delta l_6 = -\Delta l_2 = \frac{2Ml}{28EAa}$$

$$F_7 = -F_1 = \frac{3M}{28a} \qquad \Delta l_7 = -\Delta l_1 = \frac{3Ml}{28EAa}$$

$$F_4 = 0 \qquad \Delta l_4 = 0.$$

Kruta greda AB vezana je pomoću sedam jednakih štapova i opterećena s dvije sile, prema slici 7.22. Štapovi se nalaze na jednakim razmacima a. Naći sile u štapovima.



Slika 7.22

Reduciramo li obje sile na točku C, dobit ćemo rezultirajuću silu $3F$ i rezultirajući moment $M=4F\cdot 2a+F\cdot 3a=11Fa$. Zadatak ćemo riješiti metodom superpozicije. Sama sila $3F$ izazvat će, zbog simetrije, paralelan pomak grede, pa će deformacije i naprezanja u svim štapovima biti jednaki. Kako su i površine štapova jednake, bit će i sile jednake. tj.

$$F_1'=F_2'=\ldots=F_7'.$$

Uvjet ravnoteže $\Sigma F_y=0$ u tom slučaju glasi

$$7F_1'=3F,$$

odnosno

$$F_1'=F_2'=\ldots F_7'=\frac{3}{7}F.$$

Sile koje uzrokuje moment $M=11Fa$ možemo dobiti pomoću rješenja prethodnog primjera. Tako je npr. sila F_5'' prema prethodnom primjeru

$$F_5''=\frac{M}{28a}=\frac{11Fa}{28a}=\frac{11}{28}F,$$

pa je ukupna sila u štapu 5

$$F_5=F_5'+F_5''=\frac{23}{28}F.$$

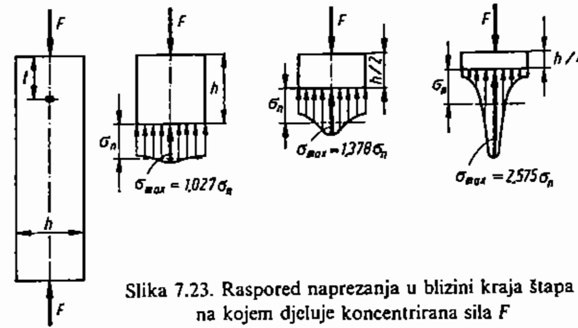
Sila u štapu 1 jest

$$F_1=F_1'+F_1''=\frac{3}{7}F+\left(-\frac{3}{28a}11Fa\right)=-\frac{21}{28}F.$$

Na sličan način možemo dobiti sile i u ostalim štapovima.

7.6. Koncentracija naprezanja i St. Venantov princip

Jednolik raspored naprezanja po poprečnom presjeku štapa ostvarit će se samo ako je presjek dovoljno udaljen od djelovanja koncentrirane sile i ako u blizini nema nagle promjene poprečnog presjeka. U blizini otvora, naglih prelaza ili na mjestu djelovanja koncentriranih sila raspored naprezanja nije ni približno jednolik. Maksimalno naprezanje može biti mnogo puta veće od prosječnog (nazivnog ili nominalnog) naprezanja. Ta pojava naziva se koncentracija naprezanja. Analitičko određivanje naprezanja u blizini otvora vrlo je složeno i ne može se obaviti metodama nauke o čvrstoći. Niz jednostavnijih i za praksu važnih problema riješen je metodama teorije elastičnosti. Danas se za rješavanje problema koncentracije naprezanja služimo eksperimentalnim metodama, u prvom redu fotoelasticimetrijom, a i numeričkim metodama. Ovdje ćemo navesti nekoliko primjera s gotovim rezultatima. Na slici 7.23 prikazan je plosnat štap širine h i debljine b ($h \gg b$) koji je opterećen koncentriranom silom F. Ovdje navodimo rezultate za raspored naprezanja u poprečnom presjeku koji je od kraja štapa udaljen za iznos $h/4$, $h/2$ i h. Rezultati su prikazani na slici 7.23.



Slika 7.23. Raspored naprezanja u blizini kraja štapa na kojem djeluje koncentrirana sila F

Prema raspodjeli naprezanja na slici 7.23 vidimo da je raspodjela naprezanja u blizini hvatišta koncentrirane sile F vrlo nejednolika. Maksimalno naprezanje u neposrednoj blizini hvatiša F mnogostruko je veće od prosječnog naprezanja (kad bi sila zaista djelovala u jednoj točki, bilo bi $\sigma_{max}=\infty$). Kako se udaljavamo od hvatišta koncentrirane sile, maksimalno naprezanje naglo opada i približava se prosječnom naprezanju po presjeku. Na udaljenosti h od hvatišta sile maksimalno naprezanje σ_{max} samo je oko 2,7% veće od prosječnog ili nominalnog naprezanja $\sigma_n=F/A=F/(bh)$.

Ako se u štapu nalaze geometrijski diskontinuiteti u obliku otvora, utora, naglog suženja, na tom će mjestu raspodjela naprezanja biti vrlo nejednolika, tj. javlja se *koncentracija naprezanja*. Na slici 7.24 prikazana su dva plosnata štapa, od kojih štap A ima geometrijski diskontinuitet u obliku kružnog otvora polumjera r, a štap B dva polukružna utora polumjera r.

Maksimalno naprezanje σ_{max} ovisi o obliku i veličini diskontinuiteta te srednjem naprezanju, što se izražava pomoću izraza

$$\sigma_{max}=K\sigma_n, \tag{7.26}$$

gdje je K faktor koncentracije naprezanja, a σ_n nominalno ili srednje naprezanje po oslabljenom presjeku, tj.

$$\sigma_n = \frac{F}{A_n} = \frac{F}{(h-2r)\,b}, \tag{7.27}$$

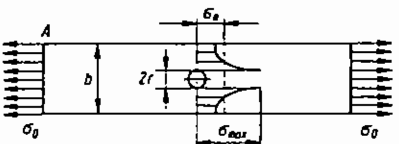
gdje je A_n površina oslabljenog poprečnog presjeka. Faktori koncentracije naprezanja za plosnat štap sa središnjim kružnim otvorom i za štap s dva polukružna utora prikazani su dijagramom na slici 7.24. Teorijsko rješenje za faktor koncentracije naprezanja u beskonačnoj ploči s eliptičnim otvorom, koja je opterećena na rastezanje, prema slici 7.25, glasi

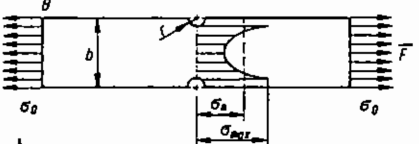
$$K = 1 + 2\frac{a}{b}, \tag{7.28}$$

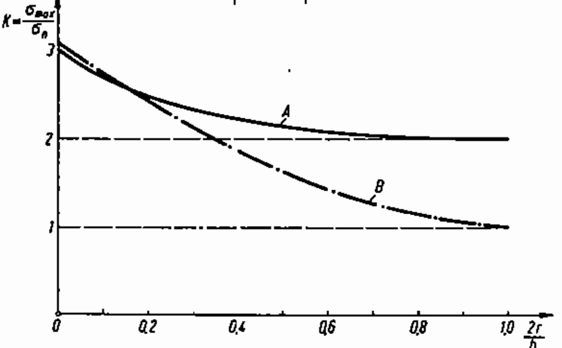
gdje je

$$K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_0}.$$

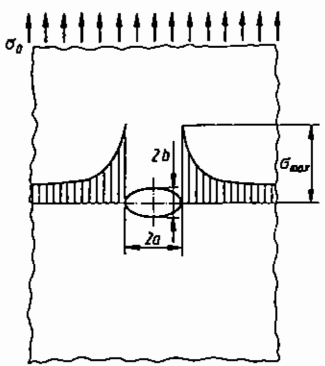
Ako je $a/b=2$, bit će $K=5$, a ako je $a/b=1/2$, bit će $K=2$. Vidimo da je koncentracija naprezanja mnogo veća ako je elipsa (ili bilo koji duguljasti otvor) postavljen poprečno na smjer rastezanja ili sabijanja, nego ako je postavljen uzdužno. Općenito, koncentracija naprezanja je to veća što je manji polumjer zakrivljenosti otvora ili utora. Taj izraz vrijedi približno i za štap konačne širine s







Slika 7.24. Ovisnost faktora koncentracije naprezanja o veličini $2r/b$ za štap s kružnim otvorom i štap s polukružnim utorima

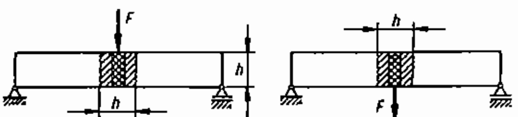


Slika 7.25. Koncentracija naprezanja u beskonačnoj ploči s eliptičnim otvorom

malim eliptičnim otvorom. Širina štapa treba biti 5 do 10 puta veća od velike osi elipse. St. Venantov princip ili princip lokalnosti djelovanja samouravnoteženog opterećenja glasi: *Ako na malom dijelu tijela djeluju međusobno uravnotežene sile, one izazivaju samo lokalna naprezanja u neposrednoj blizini djelovanja sila i vrlo brzo opadaju s udaljenošću od mjesta opterećenja.*

Ponekad se St. Venantov princip izražava i na drugi način. U točkama tijela koje su dovoljno udaljene od mjesta djelovanja vanjskog opterećenja naprezanja će se neznatno promijeniti ako jedno opterećenje zamijenimo drugim, njemu statički ekvivalentnim opterećenjem. Dva sistema sila statički su ekvivalentna ako imaju jednaku rezultantu i jednak rezultirajući moment.

Na slici 7.26 prikazane su dvije grede koje su opterećene različitim ali statički ekvivalentnim opterećenjem. Unutar dvostruko iscrtanog područja naprezanja se u oba slučaja znatno razlikuju (do 50% i više). Unutar jednostruko iscrtanog područja naprezanja se mnogo manje razlikuju, a izvan procrtanog područja razlika je neznatna (manje od 5%).



Slika 7.26. Ilustracija St. Venantova principa

PRIMJER 7.15

Oslabljen štap, prema slici 7.27, opterećen je silama F. Naći maksimalno naprezanje u presjeku $A-A$, ako je zadano: debljina $h=1\,\text{cm}$, $b=8\,\text{cm}$, $r=2\,\text{cm}$, $F=20\,\text{kN}$. Površina presjeka $A-A$ iznosi $A_n=(b-2r)\,h=4\,\text{cm}^2$. Prosječno naprezanje u presjeku jest

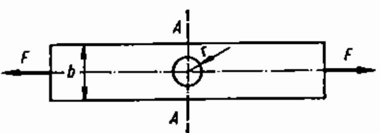
$$\sigma_n = \frac{F}{A_n} = \frac{20\,10^3}{4\cdot 10^{-4}} = 5\cdot 10^7\ \text{N/m}^2 = 50\ \text{MPa}.$$

Maksimalno naprezanje, prema izrazu (7.26), iznosi

$$\sigma_{max} = K\,\sigma_n,$$

gdje je K faktor koncentracije naprezanja koji ćemo očitati s dijagrama na slici 7.24 za štap A. Potrebno je da izračunamo omjer $2r/b$, koji iznosi 0,5. Za taj omjer faktor koncentracije naprezanja iznosi $K=2{,}11$, pa je

$$\sigma_{max} = 2{,}11\cdot 50 = 105{,}5\ \text{MPa}.$$

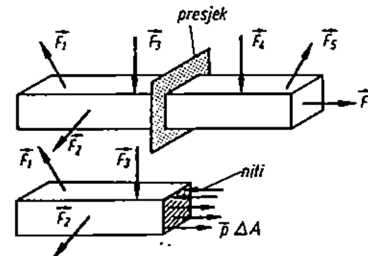


Slika 7.27

8. UVIJANJE ŠTAPOVA

8.1. Opći pristup rješavanju problema u nauci o čvrstoći

Prije nego pristupimo proučavanju ovog poglavlja preporučljivo je da student utvrdi gradivo poglavlja u kojem se govori o rješavanju statički neodređenih problema, posebno da proradi primjere 7.13 i 7.14. U sedmom smo poglavlju proučavali naprezanja i deformacije u aksijalno opterećenim štapovima. Rješenje smo mogli naći tek nakon pretpostavke o jednolikoj raspodjeli naprezanja po poprečnom presjeku. Analogno tome, morat ćemo uvesti određene pretpostavke o deformiranju, odnosno o raspodjeli naprezanja pri uvijenju i savijanju štapova. Istim postupkom koristimo se i pri analizi ploča, ljusaka, prstenova i drugih oblika tijela.



Slika 8.1. Problem određivanja raspodjele unutrašnjih sila po presjeku štapa jest statički neodređen

Problem određivanja naprezanja u štapu ili bilo kojem drugom obliku jest statički neodređen. Zamislimo štap prema slici 8.1. Uočimo bilo koji presjek štapa, npr. $A-A$. Možemo zamisliti da se djelovanje jednog dijela štapa na drugi prenosi pomoću velikog broja infinitezimalno kratkih niti (pretpostavlja se da niti mogu prenositi i tlačne sile). Svaka nit zamjenjuje djelovanje jednog malog vektor naprezanja $\vec{p}\Delta A$. Problem određivanja sila u tim nitima sličan je problemu određivanja sila u štapovima u primjerima 7.13 i 7.14. U tim primjerima kruta je greda povezana sa sedam štapova. Koristeći uvjet krutosti grede, mogli smo izraziti produljenja Δl_i svih štapova pomoću translatornog pomaka središta grede δ i

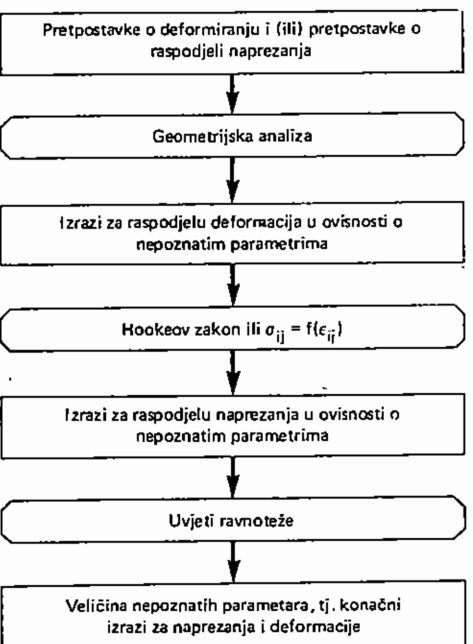
kutnog pomaka α. Zatim smo iz produljenja odredili deformacije ε_i, pa pomoću Hookeova zakona naprezanja $\sigma_i = \varepsilon_i E$, odnosno sile $F_i = \sigma_i A$. Na taj način znali smo unaprijed međusobne odnose svih sila u štapovima, tj. njihovu kvalitativnu raspodjelu, ali ne i veličinu. Primjenom uvjeta ravnoteže $\Sigma M = 0$ i $\Sigma F_y = 0$ odredili smo nepoznate parametre α i δ, a zatim i veličinu sila.

U primjeru 7.13 lako smo ustanovili da je translatorni pomak jednak nuli. U primjeru 7.14 uočili smo da je prikladno vanjsko opterećenje reducirati na središte grede. Pritom dobivamo rezultantu i rezultirajući spreg. Potpuno isti postupak bio bi i u slučaju da je greda vezana s mnogo većim brojem štapova. Iako smo u zadacima 7.13 i 7.14 pretpostavili da je greda kruta, idealno krutih greda nema. Svaka je greda u većoj ili manjoj mjeri deformabilna. Međutim, ako je deformiranje grede zanemarivo maleno u odnosu na produljenja štapova, dobiveno rješenje razlikovat će se neznatno od stvarnog.

Pri analizi naprezanja i deformacija štapova postupamo slično kao i kod rješavanja problema 7.13 i 7.14. Vanjsko opterećenje reduciramo na težište poprečnog presjeka štapa. Rezultirajuću silu rastavljamo u normalnu i poprečne komponente, a rezultirajući moment na moment uvijanja i momente savijanja, kako je to opisano u 5. poglavlju. Posebno razmatramo pojedine vrste opterećenja: aksijalno opterećenje, uvijanje, savijanje i smicanje. Prvi korak analize jest u tome da uvedemo pretpostavke o deformiranju štapa. Najčešća pretpostavka jest da poprečni presjeci ostaju ravni pri deformiranju. (Ta je pretpostavka analogna pretpostavci o krutosti grede u primjerima 7.13 i 7.14.) Osim te pretpostavke mogu se uvesti i druge pretpostavke o deformiranju ili direktno pretpostavke o raspodjeli naprezanja. Na temelju pretpostavki o deformiranju geometrijskom analizom dolazimo do izraza za raspodjelu deformacija. U tim izrazima pojavljuje se jedan ili više nepoznatih parametara. To znači da znamo zakon po kojem se mijenjaju deformacije, ali ne znamo veličinu samih deformacija. Pomoću Hookeova zakona (elastičnih materijala) ili nekog drugog zakona koji povezuje naprezanja i deformacije možemo dobiti i raspored naprezanja. Zatim pomoću uvjeta ravnoteže određujemo veličinu nepoznatih parametara, a samim tim i veličinu naprezanja i deformacija za pojedinu vrst opterećenja. Taj je postupak shematski prikazan na slici 8.2. Nepoznatih parametara smije biti toliko koliko u konkretnom slučaju ima nezavisnih uvjeta ravnoteže.

Osim pretpostavki o deformiranju uvode se i druge pretpostavke ili ograničenja, kao npr. pretpostavka o malom maksimalnom progibu, o maloj visini nosača u odnosu na raspon itd. Te pretpostavke i ograničenja olakšavaju rješavanje problema, ali se problem. u principu, može riješiti i bez njih. Međutim, pretpostavke o deformiranju, odnosno pretpostavke o raspodjeli naprezanja omogućuju rješavanje problema analize naprezanja za razne slučajeve opterećenja (uvijanje i savijanje štapova, savijanje ploča i ljuski, uvijanje prstenova, debele cijevi, rotirajući diskovi itd.) i bez njih se ti problemi ne bi mogli riješiti metodama nauke o čvrstoći. Ponekad se i u teoriji elastičnosti uvode pretpostavke o deformiranju; međutim, u teoriji elastičnosti navedene probleme možemo riješiti (bar u principu) i bez uvođenja pretpostavki o deformiranju. U tom slučaju pretpostavke se uvode radi olakšavanja matematičkog rješavanja problema.

Pretpostavke o deformiranju moraju biti postavljene što je moguće realnije. Ako uvedene pretpostavke znatnije odstupaju od stvarnog deformiranja, izrazi koje dobijemo pomoću njih neće biti točni. Pretpostavke možemo postaviti na temelju razmišljanja, iskustva, pokusa itd. Nakon što su izvedeni izrazi za naprezanja, deformacije i pomake, potrebno ih je provjeriti. To možemo učiniti eksperimentalno ili usporedbom s rezultatima iz teorije elastičnosti. Obično se smatra da je odstupanje do 5% zadovoljavajuće.



Slika 8.2. Shematski prikaz općeg pristupa analizi naprezanja i deformacija metodama *Nauke o čvrstoći*

8.2. Naprezanja i deformacije pri uvijanju

Pretpostavke o deformiranju i raspodjeli naprezanja. Analizu naprezanja i deformacija provest ćemo uz ove pretpostavke:

1. pri deformiranju štapa poprečni presjeci ostaju ravni i okomiti na uzdužnu os štapa
2. poprečni presjeci zakreću se kao krute figure, tj. ne deformiraju se u svojoj ravnini
3. normalno naprezanje σ_x jednako je nuli.

Izvedeni izrazi vrijedit će uz ograničenja:

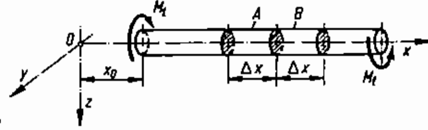
1. promatrani presjeci dovoljno su udaljeni od mjesta djelovanja koncentriranih spregova (dovoljna udaljenost je oko jednog polumjera)

2. štapovi su ravni, konstantnog poprečnog presjeka

3. poprečni presjek može biti samo krug ili kružni vijenac.

Ako se poprečni presjek mijenja postepeno i ako je štap zakrivljen, izvedeni izrazi vrijedit će približno. Bit će to točniji što se postupnije mijenja presjek i što je manja zakrivljenost štapa, tj. što je manji omjer d/ρ, gdje je d promjer štapa, a ρ polumjer zakrivljenosti.

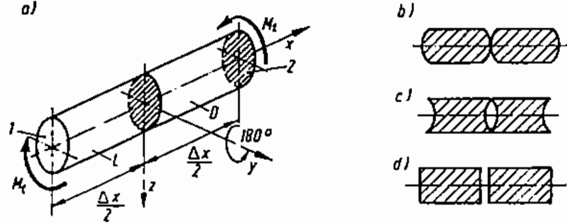
Uvedene pretpostavke o deformiranju pri uvijanju okruglih štapova u cijelosti su ispunjene, u što se možemo uvjeriti ovim razmatranjem: Na slici 8.3 prikazan je okrugao ravan prizmatičan štap koji je opterećen momentima uvijanja na krajevima. Budući da je M_t konstantan duž osi štapa, bilo koja dva elementa A i B deformirat će se jednako jer su geometrijski identični i opterećeni na isti način, a i elastična svojstva su im jednaka. Štap i svi njegovi dijelovi rotacijski su simetrični oko uzdužne osi x.



Slika 8.3. Elementi A i B su jednaki i na isti način opterećeni

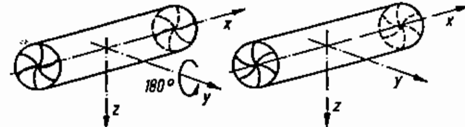
Element A prikazan je još jednom na slici 8.4a. Ako element okrenemo za 180° oko osi y, njegov desni dio D doći će u isti položaj kao lijevi dio L i bit će na isti način opterećen. Zaključujemo da deformiranje dijela D mora biti takvo da se nakon rotacije oko osi y za 180° deformirani dio D podudara s deformiranim dijelom L. Zbog rotacijske simetrije poprečni presjek može preći samo u rotacijsku površinu ili ostati ravan. Ako se presjek 1 ispupči, morat će se i presjek 2 ispupčiti, što bi dovelo do deformiranja dva susjedna elementa, prema slici 8.4b. Ako se pak presjek 1 udubi, udubit će se i presjek 2, što dovodi do deformiranja, prema slici 8.4c. Oba ta načina mogu nastati samo uz pojavu pukotina, što se u stvarnosti ne dešava. Prema tome zaključujemo da pri deformiranju poprečni presjeci ostaju ravni i okomiti na uzdužnu os.

Razmotrimo sada drugu pretpostavku o deformiranju. Ako se jedan polumjer pri deformiranju iskrivi, iskrivit će se svi polumjeri u svim presjecima na isti način jer to slijedi iz uvjeta simetrije. Deformirani polumjeri prikazani su na slici 8.5a.



Slika 8.4. Simetrija problema uvijanja prizmatičnog kružnog štapa uvjetuje da poprečni presjeci ostaju ravni i okomiti na uzdužnu os

Ako element zarotiramo oko osi y za 180°, dobit ćemo element prema slici 8.5b. Obje bi slike zbog simetrije morale biti identične. To je moguće jedino ako polumjeri pri deformiranju ostaju ravni, tj. ako se poprečni presjeci zakreću kao krute figure. Sada kad smo uveli pretpostavke o deformiranju, možemo pristupiti analizi naprezanja i deformacija, prema shemi sa slike 8.2.



Slika 8.5. Simetrija problema uvjetuje da pri deformiranju polumjeri ostaju ravni

Geometrijska analiza. Zamislimo da smo štap sa slike 8.3 podijelili u niz elemenata male duljine Δx. Relativni zakret desnog kraja prema lijevom bit će za sve elemente isti, i bit će to veći što je veći Δx. Trostruko dulji element imat će trostruko veći zakret, pa možemo pisati

$$\Delta\alpha = \vartheta\,\Delta x,$$

gdje je $\Delta\alpha$ relativni zakret desnog dijela u odnosu na lijevi, a ϑ konstanta proporcionalnosti. Veličina ϑ je zapravo relativni kut uvijanja, tj. kut uvijanja po jedinici duljine i mjeri se u rad/m, dok se kut zakreta α izražava u radijanima. Gornji izraz za infinitezimalno mali element glasi

$$\mathrm{d}\alpha = \vartheta\,\mathrm{d}x. \tag{8.1}$$

Integriranjem tog izraza dobit ćemo

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \mathrm{d}\alpha = \int_{x_0}^{x} \vartheta\,\mathrm{d}x.$$

Relativni kut uvijanja ϑ očito ovisi o momentu uvijanja M_t, promjeru štapa d i materijalu štapa. Ako su sve te veličine konstantne, bit će i ϑ konstantno, pa ga možemo izvući pred znak integrala. Nakon integracije dobit ćemo

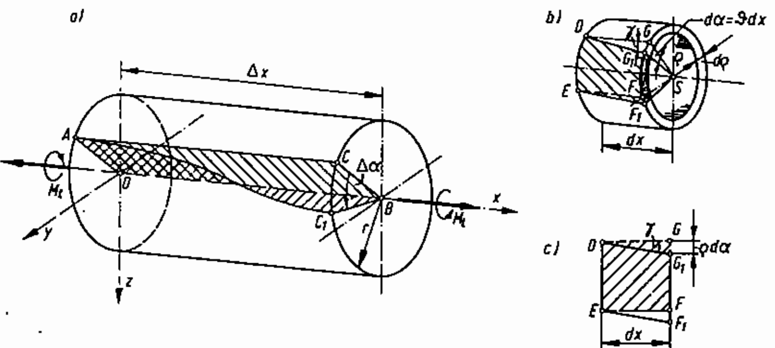
$$\alpha - \alpha_0 = \vartheta\,(x - x_0).$$

Ako ishodište koordinatnog sustava odaberemo na lijevom kraju štapa, bit će

$$\alpha = \alpha_0 + \vartheta x. \tag{8.2}$$

U tom slučaju α_0 predstavlja zakret lijevog kraja štapa, tj. zakret štapa kao krutog tijela. Prema tome α_0 ne utječe na pojavu naprezanja i deformacija pa se pri daljnjoj analizi može ispustiti iz razmatranja. Naime, osovina (štap) može se okrenuti mnogo puta oko svoje osi. Ako se pritom svi presjeci okrenu za isti iznos, neće se pojaviti deformacije i naprezanja. Nasuprot tome, ako je jedan kraj nepomičan, a drugi se samo malo zakrene, u osovini se pojavljuju naprezanja i deformacije.

Razmotrimo dio vratila prema slici 8.6a. Radi jednostavnosti zamislit ćemo da je lijevi kraj nepomičan, a da se desni zakrenuo za iznos $\Delta\alpha$. Pri tome ravnina $OABC$ prelazi u zavojnu plohu $OABC_1$. Pravac AC prelazi u dio kružne zavojnice AC_1. Zamislimo da smo iz vratila isjekli element pomoću dva bliska poprečna presjeka na mjestu x i $x+dx$, te pomoću dva bliska cilindrična presjeka promjera ρ i $\rho+d\rho$. Taj je element prikazan na slici 8.6b. Na njegovu plaštu ucrtajmo pravokutnik $DEFG$. Opet možemo zamisliti da lijevi kraj elementa ostaje nepomičan, a da se desni dio zakrenuo za kut $d\alpha=\vartheta dx$. Pri tome točka G prelazi u G_1, točka F u F_1, tako da pravokutnik $DEFG$ prelazi u romboid DEF_1G_1. Pravokutnik i romboid prikazani su još jednom na slici 8.6c. Vidimo da je element $DEFG$



Slika 8.6. Geometrijska analiza uvijanja elementa kružnog štapa

deformiran smično. Duljine svih stranica pravokutnika ostale su nepromijenjene; promijenili su se samo pravi kutovi u vrhovima pravokutnika za iznos γ. Kako je kut γ vrlo malen (reda veličine 0,001 ili manji, iako je na slici radi jasnoće prikazan većim), možemo pisati

$$\gamma \approx \operatorname{tg}\gamma=\frac{\overline{GG_1}}{\overline{DG}}=\frac{\rho\,d\alpha}{dx}.$$

Uvrstimo li (8.2) u gornji izraz, dobit ćemo

$$\gamma=\rho\,\vartheta. \tag{8.3}$$

To je izraz za raspodjelu kutnih deformacija. U njemu se pojavljuje nepoznati parametar ϑ. Vidimo da je u osi štapa ($\rho=0$) kutna deformacija jednaka nuli i da raste linearno prema površini gdje ima maksimalnu vrijednost.

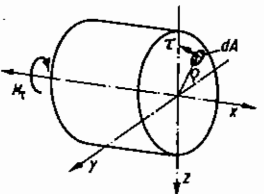
Primjena Hookeova zakona. Idući korak prema shemi sa slike 8.2 jest dobivanje izraza za naprezanja primjenom Hookeova zakona. U tom slučaju imamo čisto smicanje, pa možemo pisati

$$\tau=\gamma G=\rho G\vartheta. \tag{8.4}$$

Prema tome je i naprezanje u osi štapa jednako nuli i raste linearno prema kraju. Izrazi (8.3) i (8.4) sadrže, za sada, nepoznati parametar ϑ koji ćemo odrediti pomoću uvjeta ravnoteže.

Uvjeti ravnoteže. Na slici 8.7 prikazan je dio štapa na koji s lijeve strane djeluje vanjski moment M_t, a s desne komponente unutrašnjih sila. Na malu površinu dA djeluje sila τdA koja oko osi x čini moment $\tau dA\,\rho$. Uvjet ravnoteže cijelog dijela glasi

$$\Sigma M_x=-M_t+\int_A \underbrace{\tau\,dA}_{\text{sila}}\,\underbrace{\rho}_{\text{krak}}=0.$$



Slika 8.7. Ravnoteža elementa okruglog štapa opterećenom na uvijanje

Ako u taj izraz uvrstimo (8.4), dobit ćemo

$$\int_A \rho\,G\,\vartheta\,dA\,\rho=M_t.$$

Kako se integriranje vrši po presjeku i kako je za sve točke jednog presjeka $G\vartheta$ konstantno, bit će

$$G\vartheta\int_A \rho^2\,dA=M_t.$$

Integral u gornjem izrazu predstavlja, prema (4.4), polarni moment tromosti I_p, pa je

$$G\vartheta I_p=M_t,$$

odnosno

$$\vartheta=\frac{M_t}{GI_p}. \tag{8.5}$$

Uvrstimo li izraz (8.5) u (8.4), dobit ćemo konačan izraz za raspodjelu naprezanja

$$\tau=\frac{M_t}{I_p}\rho. \tag{8.6}$$

Kut zakreta α dobit ćemo ako u izraz (8.1) uvrstimo (8.5), tj.

$$d\alpha=\vartheta\,dx=\frac{M_t}{GI_p}dx. \tag{8.7}$$

Zanemarimo li rotaciju štapa kao krutog tijela, bit će

$$\alpha=\int_0^l \frac{M_t}{GI_p}dx. \tag{8.8}$$

Ako štap ima konstantnu torzijsku krutost GI_p i ako je moment torzije konstantan, možemo M_t/GI_p izvući ispred znaka integrala, pa je

$$\alpha=\frac{M_t l}{GI_p}. \tag{8.9}$$

Izraz (8.9), naravno, vrijedi samo za štapove konstantnog poprečnog presjeka, koji su opterećeni tako da je M_t=konst. Izraz (8.8) vrijedi u prvoj aproksimaciji i u slučaju kad poprečni presjek i moment uvijanja nisu konstantni. Iz izraza (8.7) možemo dobiti

$$GI_p\frac{d\alpha}{dx}=M_t.$$

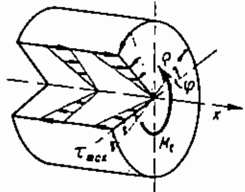
Nakon deriviranja tog izraza i uvrštavanja izraza (5.8) bit će

$$\frac{d}{dx}\left(GI_p\frac{d\alpha}{dx}\right)=\frac{dM_t}{dx}=-m_t. \tag{8.10}$$

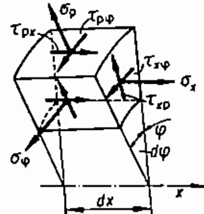
Ako je torzijska krutost GI_p konstantna, bit će

$$GI_p\frac{d^2\alpha}{dx^2}=-m_t. \tag{8.11}$$

Razmotrimo sada podrobnije raspored posmičnih naprezanja. Prema izrazu (8.6) naprezanje raste linearno od nule u osi štapa do maksimalne vrijednosti τ_{max} na površini. Kako su u okomitim presjecima posmična naprezanja međusobno jednaka, raspored posmičnih naprezanja izgledat će kao na slici 8.8. Sve ostale komponente naprezanja u tim presjecima jednake su nuli.



Slika 8.8. Raspodjela naprezanja u okruglom štapu opterećenom na uvijanje



Slika 8.9. Komponente tenzora naprezanja u cilindričnim koordinatama

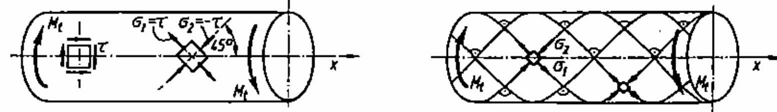
Za opisivanje uvijanja okruglih štapova pogodnije su cilindrične koordinate od pravokutnih. Komponente tenzora naprezanja u cilindričnim koordinatama ilustrirane su na slici 8.9. Matrica tog tenzora glasi

$$[\sigma_{ij}]=\begin{bmatrix}\sigma_{\rho\rho} & \sigma_{\rho\varphi} & \sigma_{\rho x}\\ \sigma_{\varphi\rho} & \sigma_{\varphi\varphi} & \sigma_{\varphi x}\\ \sigma_{x\rho} & \sigma_{x\varphi} & \sigma_{xx}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_{\rho} & \tau_{\rho\varphi} & \tau_{\rho x}\\ \tau_{\rho\varphi} & \sigma_{\varphi} & \tau_{\varphi x}\\ \tau_{\rho x} & \tau_{\varphi x} & \sigma_{x}\end{bmatrix} \tag{8.12}$$

Prva je matrica napisana tenzorskim označavanjem, a druga na uobičajeni način. Vidimo da prema tom označavanju naprezanje τ dano izrazom (8.6) predstavlja komponente $\tau_{x\varphi}$, pa matrica tenzora naprezanja kod uvijanja glasi

$$[\sigma_{ij}]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \tau\\ 0 & \tau & 0\end{bmatrix} \tag{8.13}$$

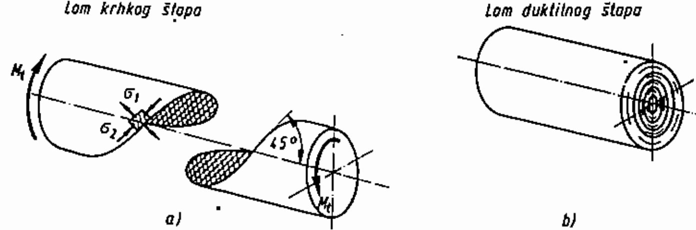
Budući da je čisto smicanje ekvivalentno istovremenom rastezanju i sabijanju u dva međusobna okomita pravca (vidi primjer 2.2), glavna naprezanja činit će kut od 45° s uzdužnom osi x, kako je prikazano na slici 8.10a. Na slici 8.10b prikazane su trajektorije naprezanja pri uvijanju. To su dvije ortogonalne familije krivulja. Tangenta na jednu familiju krivulja podudara se s pravcem σ_1, a tangenta na drugu familiju krivulja podudara se s pravcem σ_2 u danoj točki.



Slika 8.10. Glavna naprezanja i trajektorije naprezanja u štapu opterećenom na uvijanje

8.3. Dimenzioniranje štapova opterećenih na uvijanje

Vratila i ostali štapovi opterećeni na uvijanje dimenzioniraju se prema uvjetu čvrstoće i prema uvjetu krutosti. Kut uvijanja ne smije biti prevelik jer odviše elastično vratilo može uzrokovati pojavu vibracija koje su nepoželjne iz mnogo razloga. Obično je kod lakih vratila (vratila malog promjera) presudna krutost, a kod teških vratila čvrstoća. Sam lom štapa opterećenog na uvijanje ovisi o materijalu od kojeg je izrađen. Kod krhkih materijala lom izaziva najveće vlačno naprezanje, a kod rastezljivih materijala posmično naprezanje. Na slici 8.11 prikazan je shematski lom dvaju štapova kružnih presjeka. Kod krhkog materijala lom nastaje pod kutom od 45° prema uzdužnoj osi, tako da je površina loma okomita na pravac σ_1. Nasuprot tome, ako bismo htjeli izazvati lom štapa od rastezljivog



Slika 8.11. Lom štapa opterećenog na uvijanje

materijala, do loma bi došlo tek nakon znatne plastične deformacije. Površina loma okomita je na uzdužnu os štapa, tj. lom nastaje po ravnini u kojoj je posmično naprezanje najveće.

Da bismo mogli dimenzionirati štap prema oba kriterija, potrebno je poznavati dopušteno posmično naprezanje τ_{dop} i dopušteni kut uvijanja po jedinici duljine ϑ_{dop}. Promjer štapa određujemo na temelju oba uvjeta: čvrstoće i krutosti. Usvajamo veću vrijednost

$$\tau_{max}=\frac{M_t}{I_p}\rho_{max}=\frac{M_t}{I_p/\rho_{max}}\leqslant\tau_{dop} \tag{8.14}$$

$$\vartheta=\frac{M_t}{GI_p}\leqslant\vartheta_{dop} \tag{8.15}$$

Izraz (8.14) možemo preinačiti uvođenjem oznake

$$W_p=\frac{I_p}{\rho_{max}}=\frac{I_p}{r}. \tag{8.16}$$

Veličina W_p naziva se polarni moment otpora. Vidjeli smo da polarni moment tromosti I_p karakterizira krutost štapa protiv uvijanja. Isto tako W_p karakterizira čvrstoću štapa pri uvijanju. Kod punog kružnog presjeka moment otpora iznosi

$$W_p=\frac{I_p}{r}=\frac{\pi d^4}{32}\bigg/\frac{d}{2}=\frac{\pi d^3}{16}. \tag{8.17}$$

Izraz (8.14) sada glasi

$$\tau_{max}=\frac{M_t}{W_p}\leqslant\tau_{dop}. \tag{8.18}$$

Iz izraza (8.15) i (8.18) možemo dobiti

$$W_p=\frac{\pi d^3}{16}\geqslant\frac{M_t}{\tau_{dop}}$$

$$I_p=\frac{\pi d^4}{32}\geqslant\frac{M_t}{G\vartheta_{dop}},$$

odnosno

$$d\geqslant\sqrt[3]{\frac{16M_t}{\pi\tau_{dop}}} \tag{8.19}$$

$$d\geqslant\sqrt[4]{\frac{32M_t}{G\vartheta_{dop}\pi}}.$$

Odredit ćemo dopušteni moment uvijanja u ovisnosti o promjeru d vratila, ako je poznato τ_{dop}, ϑ_{dop} i G. Prema izrazima (8.15) i (8.18) možemo pisati:

$$M'_{t\,dop}=W_p\tau_{dop}=\frac{\pi d^3}{16}\tau_{dop}=C_1 d^3$$

$$M''_{t\,dop}=GI_p\vartheta_{dop}=\frac{\pi d^4}{32}G\vartheta_{dop}=C_2 d^4.$$

Kao dopušteno opterećenje usvajamo manju od tih dviju veličina. $M'_{t\,dop}$ raste s trećom potencijom, a $M''_{t\,dop}$ s četvrtom potencijom promjera, što je ilustrirano na slici 8.12. Ako je $d<d_0$, za dimenzioniranje je mjerodavna krutost, a ako je $d>d_0$, mjerodavna je čvrstoća. Vrijednost d_0 odredit ćemo izjednačavanjem izraza za $M'_{t\,dop}$ i $M''_{t\,dop}$, tj.

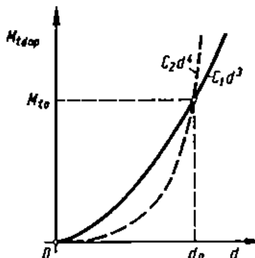
$$\frac{\pi d_0^3}{16}\tau_{dop}=\frac{\pi d_0^4}{32}G\vartheta_{dop}.$$

Odavde je

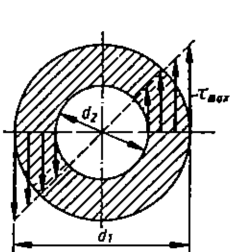
$$d_0=\frac{2\tau_{dop}}{G\vartheta_{dop}}. \tag{8.21}$$

Granični moment uvijanja jest

$$M_{t0}=\frac{\pi}{2}\left[\frac{\tau_{dop}}{G\vartheta_{dop}}\right]^3\tau_{dop}. \tag{8.22}$$



Slika 8.12. Ovisnost dopuštenog momenta uvijanja o promjeru vratila



Slika 8.13. Raspored naprezanja u štapu koji ima presjek u obliku kružnog vijenca

Ako je poprečni presjek štapa kružni vijenac, raspored naprezanja izgleda kao na slici 8.13. Moment tromosti u tom slučaju iznosi

$$I_p=\frac{\pi d_1^4}{32}-\frac{\pi d_2^4}{32}$$

$$I_p=\frac{d_1^4}{32}(1-k^4), \tag{8.23a}$$

gdje je $k=d_2/d_1$ omjer unutrašnjeg i vanjskog promjera. Moment otpora dobit ćemo pomoću izraza (8.16):

$$W_p=I_p\bigg/\frac{d_1}{2}=\frac{\pi d_1^3}{16}(1-k^4). \tag{8.23b}$$

Dok se momenti tromosti složenih likova mogu dobiti zbrajanjem i oduzimanjem momenata tromosti pojedinih dijelova, *momenti otpora ne mogu se dobiti zbrajanjem ili oduzimanjem momenata otpora pojedinih dijelova.* Uvjet krutosti i čvrstoće za šuplje vratilo sada glasi:

$$W_p=\frac{\pi d_1^3}{16}(1-k^4)\geqslant\frac{M_t}{\tau_{dop}},\qquad I_p=\frac{\pi d_1^4}{32}(1-k^4)\geqslant\frac{M_t}{G\vartheta_{dop}},$$

odnosno

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16M_t}{\pi\tau_{dop}(1-k^4)}} \qquad (8.24)$$

$$d_1 \geq \sqrt[4]{\frac{32M_t}{\pi G \vartheta_{dop}(1-k^4)}}. \qquad (8.25)$$

Usvajamo veću od dvije vrijednosti promjera dane izrazima (8.21) i (8.22). Ponekad nam je poznata snaga P koju prenosi vratilo i broj okretaja u minuti n. U tom slučaju moment uvijanja određujemo pomoću izraza

$$M_t = \frac{P}{\omega}, \qquad (8.26)$$

gdje je P snaga u vatima, a ω kutna brzina. Kako je $\omega = \pi n/30$, bit će

$$M_t = \frac{30P}{\pi n}. \qquad (8.27)$$

PRIMJER 8.1

Vratilo prenosi snagu $P = 10\,\text{kW}$ pri brzini vrtnje $n = 1000\,\text{min}^{-1}$. Odrediti promjer vratila ako je zadano $\tau_{dop} = 20\,\text{MPa}$.

Prema izrazu (8.27) moment torzije iznosi

$$M_t = \frac{30P}{\pi n} = \frac{30 \cdot 10000}{\pi \cdot 1000} = 95{,}49\,\text{Nm}.$$

Promjer vratila jest

$$d = \sqrt[3]{\frac{16M_t}{\pi\tau_{dop}}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 95{,}49}{20 \cdot 10^6}} = 0{,}029\,\text{m}$$

$$d = 29\,\text{mm}.$$

PRIMJER 8.2

Usporediti krutost i čvrstoću punog i šupljeg vratila ako oba vratila imaju jednaku površinu poprečnog presjeka. Poprečni presjeci su prikazani na slici 8.14.

Puno vratilo

$$d = 2\left(\frac{A}{\pi}\right)^{1/2}$$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi}{16}\left[2\left(\frac{A}{\pi}\right)^{1/2}\right]^3 = \frac{A^{3/2}}{2\pi^{1/2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A^3}{\pi}}$$

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{A^2}{2\pi}$$

Šuplje vratilo $d_2/d_1 = k$.

Kako je površina poprečnog presjeka dana izrazom

$$A = \frac{\pi d_1^2}{4} - \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{\pi d_1^2}{4}(1-k^2),$$

bit će

$$d_1 = 2\left[\frac{A}{\pi(1-k^2)}\right]^{1/2}.$$

Moment otpora i moment tromosti prema izrazu (8.23) iznose:

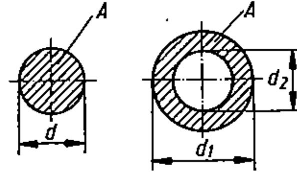
$$W_{po} = \frac{\pi d_1^3}{16}(1-k^4) = \frac{A^{3/2}}{2\pi^{1/2}}\frac{1-k^4}{(1-k^2)^{3/2}}$$

$$W_{po} = \frac{A^{3/2}}{2\pi^{1/2}}\frac{1+k^2}{(1-k^2)^{1/2}}$$

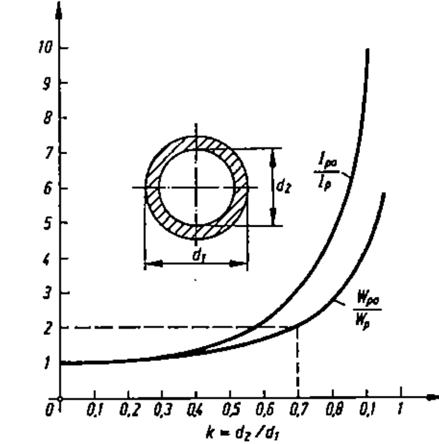
$$I_{po} = \frac{\pi d_1^4}{32}(1-k^4)\frac{A^2}{2\pi}\frac{1+k^2}{1-k^2}.$$

Omjer čvrstoće jednak je omjeru momenata otpora, a omjer krutosti jednak je omjeru momenata tromosti:

$$\frac{W_{po}}{W_p} = \frac{1+k^2}{(1-k^2)^{1/2}}, \qquad \frac{I_{po}}{I_p} = \frac{1+k^2}{1-k^2}.$$



Slika 8.14



Slika 8.15. Porast krutosti i čvrstoće šupljeg vratila pri porastu omjera d_2/d_1

Oba ta omjera prikazana su dijagramom na slici 8.15. Vidimo da je već pri omjeru $k = d_2/d_1 = 0{,}7$ krutost porasla oko tri puta, a čvrstoća preko dva puta. Pri omjeru $k = 0{,}9$ krutost je porasla oko deset puta, a čvrstoća četiri puta. Povećanjem omjera

k opada debljina stijenke, a time se povećava opasnost od izvijanja. To je jedan od glavnih ograničavajućih utjecaja na to da je $k<0{,}8$ do 0,9. Uprkos svojim prednostima šuplja vratila se ne upotrebljavaju mnogo jer je njihova izrada tehnološki složenija. Ako se izrađuju tokarenjem, nema uštede u materijalu, samo se smanjuje težina.

8.4. Statički neodređeni zadaci

Na slici 8.16a prikazan je okrugli štap koji je na oba kraja ukliješten i opterećen momentom M. Štap oslobođen veza prikazan je na slici 8.16b. Svi uvjeti ravnoteže automatski su zadovoljeni osim uvjeta

$$\Sigma M_x = M - M_A - M_B = 0.$$

Prema tome, za određivanje nepoznatih momenata M_A i M_B imamo jednu jednadžbu, pa je problem jedanput statički neodređen.



Slika 8.16. Statički neodređen štap opterećen na uvijanje

Rješavanju problema pristupamo slično kao i kod aksijalnog opterećenja. Postavljamo dopunski uvjet deformacije, npr. $\alpha_B=0$, tj. zahtijevamo da je zakret presjeka B jednak nuli. Da bismo dobili izraz za α_B, zamislimo da smo oslobodili kraj B dodavanjem momenta M_B, dok je kraj A ostao uklješten. U tom slučaju možemo pisati

$$\alpha_B = \frac{M a}{G I_p} - \frac{M_B l}{G I_p} = 0.$$

Odavde nakon kraćenja s GI_p dobivamo

$$M_B = M\frac{a}{l},$$

a zatim iz uvjeta ravnoteže

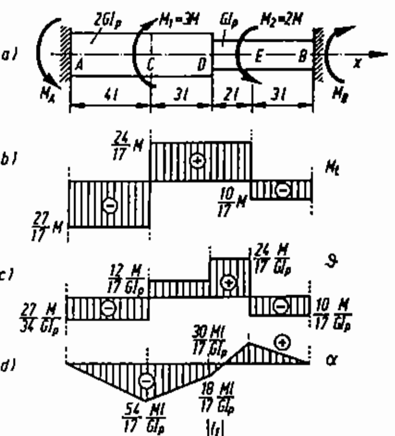
$$M_A = M\frac{b}{l}.$$

Postupak rješavanja složenijih zadataka pokazat ćemo na dva primjera.

PRIMJER 8.3

Okrugli štap promjenljiva presjeka uklješten je na oba kraja i opterećen prema slici 8.17a. Zadatak je:

- odrediti momente uklještenja M_A i M_B;
- skicirati dijagram momenata uvijanja $M_t = f(x)$;
- skicirati dijagram relativnog kuta uvijanja $\vartheta(x)$ i kuta zakreta $\alpha(x)$;
- odrediti presjek u kojem je zakret jednak nuli.



Slika 8.17

Uvjet ravnoteže glasi:

$$\Sigma M_x = M_A - M_1 + M_2 - M_B = 0, \qquad \text{(a)}$$

a uvjet deformacije

$$\alpha_B = -\frac{M_1 4l}{2GI_p} + \frac{M_2 7l}{2GI_p} + \frac{M_2 2l}{GI_p} - \frac{M_B 7l}{2GI_p} - \frac{M_B 5l}{GI_p} = 0,$$

što nakon skraćivanja s $l/2GI_p$ postaje

$$-4M_1 + 7M_2 + 4M_2 - 7M_B - 10M_B = 0. \qquad \text{(b)}$$

Rješavanjem izraza (b) dobit ćemo $M_B = \frac{10}{17}M$, a zatim iz izraza (a) $M_A = \frac{27}{17}M$.

Relativni kut uvijanja iznosi $\vartheta = \frac{M_t}{GI_p}$ i razlikuje se za četiri područja:

$$0 \leqslant x \leqslant 4l \qquad \vartheta = -\frac{27}{17}\frac{M}{2GI_p} = -\frac{27}{34}\frac{M}{GI_p}$$

$$4l \leqslant x \leqslant 7l \qquad \vartheta = \frac{12}{17}\frac{M}{GI_p}$$

$$7l \leqslant x \leqslant 9l \qquad \vartheta = \frac{24}{17}\frac{M}{GI_p}$$

$$9l \leqslant x \leqslant 12l \qquad \vartheta = -\frac{10}{17}\frac{M}{GI_p}.$$

Prirast kuta zakreta računat ćemo pomoću izraza (8.9) za odsječke duž kojih su krutosti momenta uvijanja konstantni:

$$\alpha(0) = \alpha_A = 0$$

$$\alpha(4l) = \vartheta\, 4l = -\frac{27}{34}\frac{M}{GI_p}4l = -\frac{54}{17}\frac{Ml}{GI_p} = \alpha_C$$

$$\alpha(7l) = \alpha(4l) + \frac{12}{17}\frac{M}{GI_p}3l = -\frac{18}{17}\frac{Ml}{GI_p} = \alpha_D$$

$$\alpha(9l) = \alpha(7l) + \frac{24}{17}\frac{M}{GI_p}2l = \frac{30}{17}\frac{Ml}{GI_p} = \alpha_E$$

$$\alpha(12l) = \alpha_B = \alpha(9l) - \frac{10}{17}\frac{M\,3}{GI_p} = 0.$$

Iz dijagrama $\alpha(x)$ vidimo da će se između presjeka D i E nalaziti presjek čiji je zakret jednak nuli. Iz sličnosti trokuta na dijagramu možemo dobiti:

$$2l : l_1 = |\alpha_E - \alpha_D| : |\alpha_D|$$

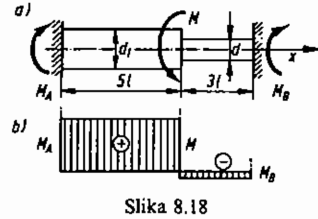
$$2l : l_1 = 48 : 18.$$

Odavde izlazi $l_1 = \frac{3}{4}$, pa je

$$\alpha(7l + l_1) = \alpha(7{,}75l) = 0.$$

PRIMJER 8.4

Okrugli štap koji se sastoji od dva dijela promjera d i d_1 ukliješten je na oba kraja i opterećen momentom M, prema slici 8.18a. Odrediti najveću dopuštenu vrijednost momenta M_{dop} ako je zadano: τ_{dop}, d i $d_1 = 2d$.



Slika 8.18

Da bismo mogli riješiti zadatak, moramo skicirati dijagram M_t, a za to je potrebno poznavati momente uklještenja. Polarni moment tromosti oba dijela iznosi:

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}, \qquad I_{p1} = \frac{\pi (2d)^4}{32} = 16\frac{\pi d^4}{32} = 16 I_p.$$

Uvjeti ravnoteže i deformacije glase:

$$M = M_A + M_B \tag{a}$$

$$\alpha_B = \frac{M\,5l}{16\,GI_p} - \frac{M_B\,5l}{16\,GI_p} - \frac{M_B\,3l}{GI_p} = 0. \tag{b}$$

Rješenjem izraza (a) i (b) dobit ćemo:

$$M_A = \frac{48}{53}M, \qquad M_B = \frac{5}{53}M.$$

Momenti otpora oba dijela štapa iznose:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}, \qquad W_{p1} = \frac{\pi (2d)^3}{16} = \frac{\pi d^3}{2}.$$

Maksimalna posmična naprezanja u lijevom i desnom dijelu jesu:

$$\tau_1 = \frac{M_A}{W_{p1}} = \frac{48}{53}\frac{2M}{\pi d^3} = \frac{96}{53}\frac{M}{\pi d^3}$$

$$\tau = \frac{M_B}{W_p} = \frac{5}{53}\frac{16M}{\pi d^3} = \frac{80}{53}\frac{M}{\pi d^3}.$$

Kako je naprezanje u prvom dijelu veće, ono je mjerodavno za određivanje dopuštenog opterećenja, pa možemo pisati

$$\tau_{max} = \frac{96 M_{dop}}{53\,\pi d^3} \leqslant \tau_{dop}.$$

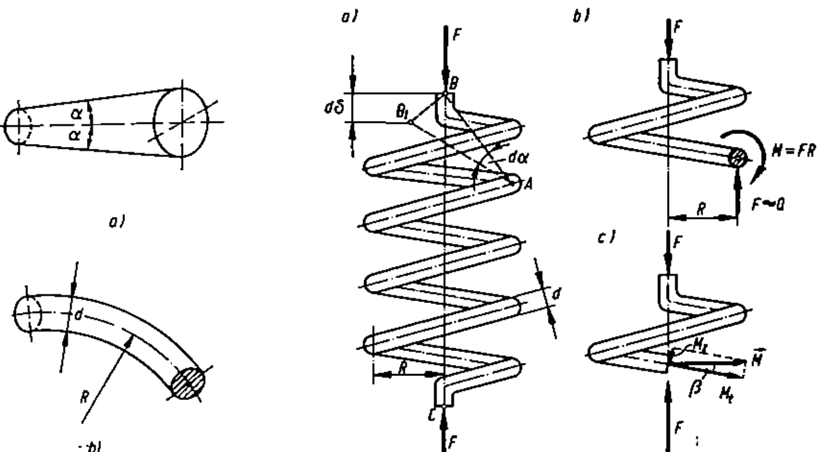
Odavde je

$$M_{dop} \leqslant \frac{53}{96}\pi d^3 \tau_{dop}.$$

8.5. Uvijanje zakrivljenih štapova i štapova promjenljiva presjeka

Ako se promjer okruglog štapa mijenja postepeno, svi izrazi koji su izvedeni za štapove konstantnog poprečnog presjeka mogu se primijeniti i za štapove promjenljivog presjeka. Možemo smatrati da je promjena presjeka postepena ako je kut 2α manji od 20° do 30°. Taj je kut definiran na slici 8.19a. Ako je promjena presjeka nagla, onda se maksimalno naprezanje može odrediti pomoću faktora koncentracije naprezanja pri uvijanju.

Izrazi izvedeni u ovom poglavlju mogu se primijeniti i na zakrivljene štapove ako je polumjer zakrivljenosti štapa R velik u odnosu na polumjer štapa d. Izrazi za naprezanja dat će dobre rezultate ako je $R/d>10$. Oznake R i d definirane su na slici 8.19b.



Slika 8.19. Okrugli štap promjenljiva presjeka i zakrivljeni okrugli štap

Slika 8.20. Žica zavojne opruge opterećena je na uvijanje

Zavojna opruga prikazana na slici 8.20a, može se smatrati zakrivljenim štapom koji je opterećen na uvijanje. Na slici 8.20b, prikazan je odsječen dio opruge. Na mjestu presjeka djeluju poprečna sila Q i moment M. Iz uvjeta ravnoteže slijedi da je $Q=F$ i $M=FR$. Moment M djeluje okomito na ravninu koju čine sila F i sila Q, tj. vektor momenta M jest okomit na os opruge. Tangenta na zavojnicu opruge čini mali kut β s pravcem momenta $\vec{M}$, pa se moment $\vec{M}$ može rastaviti u dvije komponente: moment uvijanja M_t i moment savijanja M_z koji, prema slici 8.20c, iznose:

$$M_t=M\cos\beta=FR\cos\beta$$
$$M_z=M\sin\beta=FR\sin\beta. \qquad (8.28)$$

Za opruge malog uspona može se uzeti da je $\cos\beta\approx1$ i $\sin\beta\ll1$, tj. može se savijanje zanemariti, a za moment uvijanja uzeti da je

$$M_t=FR. \qquad (8.29)$$

Taj moment izaziva posmično naprezanje

$$\tau_{max}=\frac{M_t}{W_p}=\frac{16FR}{\pi d^3}. \qquad (8.30)$$

Poprečna sila Q izaziva također posmično naprezanje u presjeku. Do sada nismo analizirali naprezanja poprečnim silama, pa ne možemo odrediti to naprezanje; međutim, prosječno naprezanje poprečnom silom iznosi

$$\tau_Q=\frac{Q}{A}=\frac{4F}{\pi d^2}.$$

Ako izraz (8.30) podijelimo s gornjim izrazom, dobit ćemo

$$\frac{\tau_{max}}{\tau_Q}=\frac{\dfrac{16FR}{\pi d^3}}{\dfrac{4F}{\pi d^2}}=4\frac{R}{d}.$$

Ako je $R/d\gg1$, onda je $\tau_Q\ll\tau_{max}$, pa se može zanemariti. Konačan izraz za naprezanje u opruzi glasi

$$\tau_{max}=\frac{16FR}{\pi d^3}.$$

Treba imati na umu da taj izraz vrijedi samo za mali kut uspona β i odnos $R/d\gg1$. Obično se uzima da je $R/d>10$.

Progib opruge odredit ćemo ovim razmatranjem: Zamislimo da je čitava opruga kruta i da se deformira samo element žice opruge u točki A duljine ds i da donji kraj opruge ostaje nepomičan. Kut zakreta iznosi

$$d\alpha=\frac{M_t}{GI_p}ds.$$

Zbog tog zakreta točka B prelazi u B_1, pri čemu je $\overline{BB_1}=AB\,d\alpha$. Približenje točke B točki C iznosi

$$d\delta=\overline{BB_1}\cos\varphi=\overline{AB}\,d\alpha\cos\varphi.$$

Kako je $AB\cos\varphi=R$, možemo pisati

$$d\delta=R\,d\alpha=\frac{M_tR}{GI_p}ds.$$

Ukupni prodib opruge δ iznosi

$$\delta=\int_l d\delta=\frac{M_tR}{GI_p}\int_l ds=\frac{M_tRl}{GI_p},$$

gdje je $l=2\pi Rn$ ukupna duljina žice opruge, a n broj zavoja opruge. Kad u gornji izraz uvrstimo vrijednost za moment torzije $M_t=FR$ i za moment tromosti $I_p=\pi d^4/32$, dobit ćemo

$$\delta=64\frac{FRn}{Gd^4}. \qquad (8.31)$$

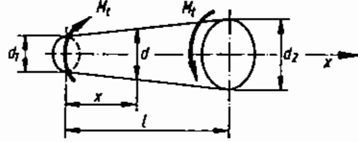
Ako omjer R/d nije velik, i ako uspon β nije malen, točnijom (ali mnogo složenijom) analizom može se pokazati da je

$$\tau_{max}=\frac{16FR}{\pi d^3}\left[1+\frac{5}{8}\frac{d}{R}+\frac{7}{32}\left(\frac{d}{R}\right)^2\right] \qquad (8.32)$$

$$\delta=64\frac{FR^3n}{Gd^4}\left[1-\frac{3}{64}\left(\frac{d}{R}\right)^2+\frac{3+\nu}{2(1+\nu)}\mathrm{tg}^2\,\alpha\right]. \qquad (8.33)$$

PRIMJER 8.5

Konusni štap opterećen je na uvijanje prema slici 8.21. Naći relativni kut zakreta njegovih krajeva. Zadano: M_t, G, d_1, $d_2=3d_1$, $l=100\,d_1$.



Slika 8.21. Štap promjenljivog presjeka opterećen na uvijanje

Promjer na udaljenosti x od lijevog kraja iznosi

$$d=d_1+\frac{d_2-d_1}{l}x=d_1\left(1+2\frac{x}{l}\right).$$

Moment tromosti lijevog kraja je $I_{p1}=\pi d_1^4/32$, a moment tromosti na proizvoljnom mjestu

$$I_p=\frac{\pi d^4}{32}=\frac{\pi d_1^4}{32}\left(1+2\frac{x}{l}\right)^4=I_{p1}\left(1+2\frac{x}{l}\right)^4.$$

Kako je

$$d\alpha=\vartheta\,dx=\frac{M_t}{GI_p}dx=\frac{M_t}{GI_p}\left(1+2\frac{x}{l}\right)^{-4}dx,$$

bit će

$$\Delta\alpha=\alpha-\alpha_0=\int_0^l\frac{M_t}{GI_p}\left(1+2\frac{x}{l}\right)^{-4}dx.$$

M_t/GI_p je konstanta koju možemo izvući pred znak integrala, pa nakon integriranja dobivamo

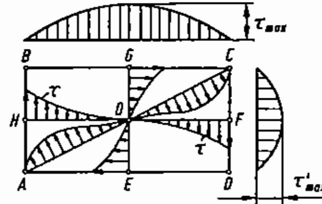
$$\Delta\alpha=-\frac{1}{3}\frac{M_t}{GI_p}\left(1-2\frac{x}{l}\right)^{-3}\frac{l}{2}\Bigg|_0^l=\frac{13}{81}\frac{M_t l}{GI_p}.$$

8.6. Uvijanje štapova neokruglog presjeka

Svi izrazi koje smo izveli u ovom poglavlju, osim izraza (8.1) i (8.2), vrijede samo za štapove koji imaju presjek u obliku kruga ili kružnog vijenca. Ti izrazi ni približno ne vrijede za štapove neokruglog presjeka i *ne smiju se na njih primijeniti.*

Određivanje naprezanja u štapovima neokruglog presjeka složen je matematički problem i rješava se u okviru teorije elastičnosti, pa ćemo ovdje navesti samo gotove rezultate bez izvođenja. Na slici 8.22 prikazan je raspored posmičnih naprezanja u štapu pravokutnog presjeka koji je opterećen na uvijanje. Prema izrazu (8.6) očekivali bismo da se najveća naprezanja javljaju u točkama konture

koje su najudaljenije od težišta poprečnog presjeka štapa. To su ovdje točke A, B, C i D. Međutim, naprezanja u tim točkama jednaka su nuli. Nasuprot tome maksimalna posmična naprezanja τ_{max} javljaju se u sredini duljih stranica, tj. u



Slika 8.22. Raspored posmičnih naprezanja u štapu pravokutnog presjeka koji je opterećen na uvijanje

točkama E i G koje su od svih točaka na konturi najbliže težištu poprečnog presjeka, dakle suprotno nego kod uvijanja okruglog presjeka. Maksimalna naprezanja τ_{max}, τ'_{max} te kut uvijanja ϑ pravokutnog štapa određujemo prema izrazima:

$$\tau_{max}=\frac{M_t}{\alpha h b^2} \tag{8.34}$$

$$\vartheta=\frac{M_t}{\beta G h b^3} \tag{8.35}$$

$$\tau'_{max}=\gamma\,\tau_{max} \tag{8.36}$$

Vrijednosti koeficijenata α, β i γ ovise o omjeru h/b, a prikazane su u tablici 8.1.

Tablica 8.1

Vrijednosti koeficijenata α, β i γ ovisne o omjeru h/b

h/b	1	1,5	2	3	4	6	8	10	
α	0,208	0,231	0,246	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,299	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
γ	1,000	0,858	0,796	0,753	0,745	0,743	0,743	0,743	0,743

U tablici 8.2 prikazane su vrijednosti maksimalnog posmičnog naprezanja τ_{max} i relativnog kuta uvijanja ϑ za različite pune presjeke.

Maksimalno posmično naprezanje τ_{max} i relativni kut uvijanja ϑ u tankostjenim štapovima otvorenog i zatvorenog presjeka računaju se pomoću izraza:

$$\tau_{max}=\frac{M_t}{W_t} \tag{8.37}$$

$$\vartheta=\frac{M_t}{GI_t}. \tag{8.38}$$

Tablica 8.2

Vrijednosti τ_{max} i ϑ za različite pune presjeke

Oblik presjeka	Površina	Maksimalno naprezanje τ_{max}	Relativni kut uvijanja ϑ
2a, 2b	πab	$\dfrac{2M_t}{\pi ab^2}$	$\dfrac{a^2+b^2}{\pi a^3 b^3} M_t$
a	a^2	$4{,}8\dfrac{M_t}{a^3}$	$7{,}1\dfrac{M_t}{a^4 G}$
a	$0{,}433\,a^2$	$20\dfrac{M_t}{a^3}$	$46\dfrac{M_t}{a^4 G}$
a	$0{,}866\,a^2$	$5{,}7\dfrac{M_t}{a^3}$	$8{,}8\dfrac{M_t}{a^4 G}$

Ti su izrazi analogni izrazima (8.18) i (8.5) za okrugle štapove. Veličine I_t i W_t jesu geometrijske karakteristike presjeka koje definiraju torzijsku čvrstoću i torzijsku krutost neokruglih presjeka. Analogno polarnom momentu tromosti i polarnom momentu otpora I_t se naziva torzijski moment krutosti (tromosti) a W_t torzijski moment otpora. Veličina BI_t predstavlja torzijsku krutost neokruglog štapa analogno torzijskoj krutosti GI_p okruglog štapa. Torzijski moment krutosti i torzijski moment otpora zatvorenog tankostjenog štapa određuju se pomoću izraza

$$I_t=\frac{4A_0}{\oint\frac{ds}{t}},\quad W_t=2A_0\,t_{min}, \qquad (8.39)$$

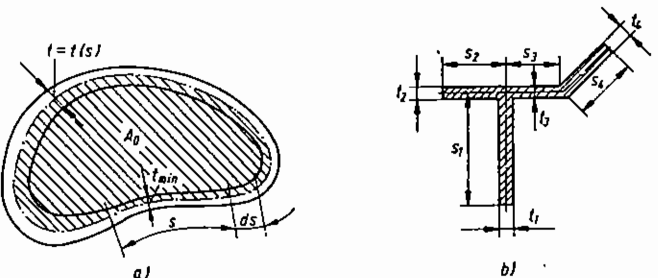
gdje je A_0 površina koju zatvara središnja linija koja raspolovljava debljinu stijenke t. Ta je na slici 8.23a označena s točka–crta–točka. Površina A_0 je iscrtana. Debljina stijenke t može biti konstantna ili promjenljiva.

Torzijski moment krutosti i torzijski moment otpora za tankostjeni štap otvorenog presjeka, slika 8.23b, dani su izrazima

$$I_t=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} s_i t_i^3 \qquad (8.40)$$

$$W_t=\frac{I_t}{t_{max}}.$$

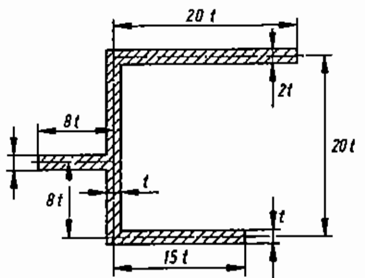
Maksimalno posmično naprezanje kod otvorenog presjeka javlja se na mjestu gdje je stijenka najdeblja a kod zatvorenog presjeka gdje je stijenka najtanja. Zamislimo dva tankostjena štapa jednakog poprečnog presjeka, od kojih je jedan zatvoren a drugi uzdužno presječen. Neka su oba štapa opterećena jednakim momentom uvijanja M_t. Naprezanja i kut uvijanja višestruko su veći u otvorenom presjeku nego u zatvorenom, što ćemo ilustrirati u primjeru 8.8. Prema tome treba izbjegavati otvorene tankostjene štapove kao torzijske elemente konstrukcije.



Slika 8.23. Poprečni presjek tankostjenog štapa: a) zatvoreni presjek, b) otvoreni presjek

PRIMJER 8.6

Odrediti relativni kut uvijanja ϑ te maksimalno naprezanje τ_{max} u tankostjenom štapu otvorenog presjeka koji je opterećen momentom uvijanja M_t. Poprečni presjek štapa zadan je na slici 8.24. Zadano: t, M_t, G.



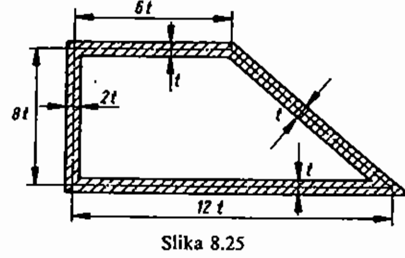
Slika 8.24

$$I_t=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4} s_i t_i^3=\frac{1}{3}\left[20t\,(2t)^3+20t\,t^3+15t\,t^3+8t\,(2t)^3\right] \qquad I_t=81{,}33\,t^4$$

$$W_t=\frac{I_t}{t_{max}}=\frac{81{,}33\,t^4}{2t}=40{,}67\,t^3$$

$$\tau_{max}=\frac{M_t}{W_t}=\frac{M_t}{40{,}67\,t^3} \qquad \vartheta=\frac{M_t}{GI_t}=\frac{M_t}{259\,G\,t^4}.$$

Zadan je presjek zatvorenog tankostjenog štapa, prema slici 8.25. Štap je opterećen momentom uvijanja M_t. Odrediti relativni kut uvijanja ϑ i maksimalno posmično naprezanje τ_{max}. Zadano: M_t, t, G.



Slika 8.25

$$A_0 = 8t \cdot 6t + \frac{1}{2} 8t \cdot 6t = 72t^2$$

$$\oint \frac{ds}{t} = \frac{8t}{2t} + \frac{12t}{t} + \frac{10t}{t} + \frac{6t}{t} = 32$$

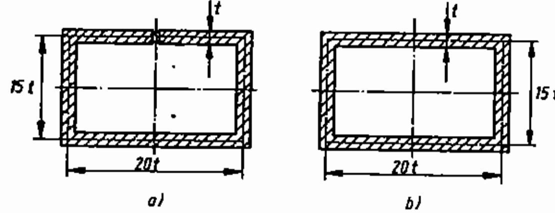
$$I_t = \frac{4A_0^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{4 \cdot 72^2 t^4}{32} = 648\, t^4$$

$$W_t = 2A_0 t_{min} = 2 \cdot 72 t^2 t = 144\, t^3$$

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{144\, t^3} \qquad \vartheta = \frac{M_t}{GI_t} = \frac{M_t}{648\, G t^4}$$

PRIMJER 8.8

Usporediti torzijski moment krutosti i torzijski moment otpora dvaju tankostjenih štapova jednakog poprečnog presjeka. Jedan je štap uzdužno razrezan, tako da je poprečni presjek otvoren kao na slici 8.26a, dok je drugi poprečni presjek zatvoren kao na slici 8.26b.



Slika 8.26. Tankostjeni štap zatvorenog presjeka mnogo je krući i čvršći od tankostjenog štapa otvorenog presjeka istih dimenzija

a) Otvoreni presjek

$$I'_t = \frac{1}{3} \sum s_i t_i^3 = \frac{1}{3} \left[20\, t\, t^3 + 15\, t\, t^3 \right] 2$$

$$I'_t = 23{,}3\, t^4$$

$$W'_t = \frac{I_t}{t_{max}} = 23{,}3\, t^3$$

b) Zatvoreni presjek

$$A_0 = 20\, t\, 15\, t = 300\, t^2$$

$$\oint \frac{ds}{t} = \frac{10t}{t} + \frac{15t}{t} + \frac{20t}{t} + \frac{15t}{t} + \frac{10t}{t} = 70$$

$$I''_t = \frac{4A_0^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{4 \cdot 300^2 t^4}{70} = 5142{,}9\, t^4$$

$$W''_t = 2A_0 t_{min} = 2 \cdot 300\, t^2\, t = 600\, t^3$$

Omjer momenata krutosti iznosi:

$$\frac{I''_t}{I'_t} = \frac{5142{,}9\, t^4}{23{,}3\, t^4} = 220{,}7$$

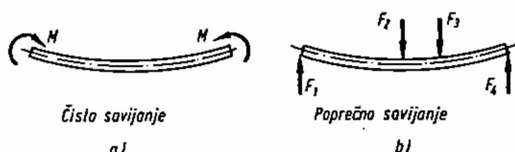
$$\frac{W''_t}{W'_t} = \frac{600\, t^3}{23{,}3\, t^3} = 25{,}75.$$

Vidimo da je krutost zatvorenog presjeka veća oko 220 puta a čvrstoća oko 26 puta, što je zaista velika razlika!

9. SAVIJANJE ŠTAPOVA

9.1. Uvodne napomene i razvoj teorije savijanja štapa

Do sada smo razmatrali rastezanje, sabijanje i uvijanje štapova. U svim tim slučajevima uzdužna je os štapa pri deformiranju ostala nepromijenjena, tj. ravna. Nasuprot tome, pri savijanju se ravni štapovi zakrivljuju, a zakrivljeni štapovi mijenjanju svoju zakrivljenost. Ako se vanjske sile u nekom poprečnom presjeku reduciraju samo na spreg, kažemo da je štap opterećen na *čisto savijanje* ili *savijanje spregovima*, a ako se u poprečnom presjeku javljaju i poprečne sile, govorimo o *poprečnom savijanju* ili *savijanju silama*. Na slici 9.1a prikazan je štap savijan spregovima, a na slici 9.1b štap savijan silama. Ako moment savijanja djeluje oko glavne osi tromosti poprečnog presjeka štapa, imamo *obično savijanje*, a ako moment savijanja ne djeluje ni oko jedne glavne osi tromosti, imamo *koso savijanje*.



Slika 9.1. Čisto i poprečno savijanje

Galileo Galilei (1564 – 1642) prvi je analitički pristupio razmatranju savijanja grede u djelu "I due nuovi scienze fisiche...", objavljenom 1638. U svom razmatranju pošao je od konzole, prema slici 9.2a, i uočio da lom počinje u točki B i širi se prema točki A. Pri tome se odlomljena konzola okreće oko točke A. Dok ne dođe do loma grede, moment unutrašnjih sila po presjeku AB drži ravnotežu momentu sile F. Galileo je krivo pretpostavio da su naprezanja po presjeku jednoliko raspodijeljena. U tom slučaju rezultanta unutrašnjih sila prolazi kroz središte presjeka i iznosi $F_1 = \sigma_{max} bh$. Krak te sile oko točke A iznosi $h/2$, pa ravnoteža momenata oko tačke A glasi

$$\sigma_{max} bh \frac{h}{2} = Fl.$$

Odavde bi maksimalno naprezanje po Galilejevoj pretpostavci iznosilo

$$\sigma_{max} = 2\frac{Fl}{bh^2}.$$

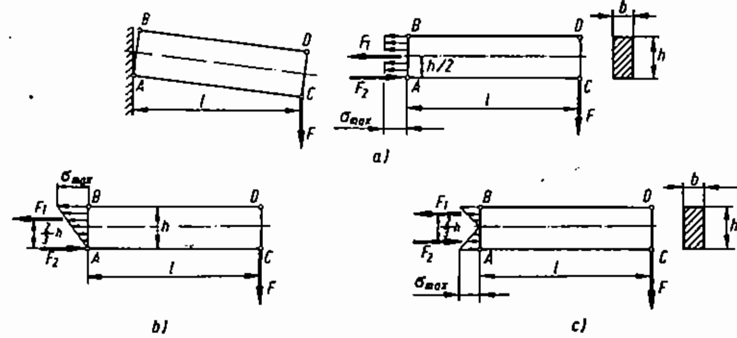
Iako danas znamo da je Galilejevo rješenje neispravno, ono je imalo veliko značenje za daljnji razvoj teorije savijanja. Oko pedeset godina nakon Galileja to je rješenje popravio E. Mariotte (1690. god.), uočivši da se vlakna to više rastežu što su dalje od okretišta A, pa i unutrašnje sile rastu linearno od nule u točki A do maksimalne vrijednosti u točki B. Na temelju toga naprezanja su raspodijeljena po zakonu trokuta, kao na slici 9.2b. Rezultanta unutrašnjih sila iznosi $\sigma_{max} bh/2$ i djeluje na kraju $2h/3$. Ravnoteže momenata oko A glasi

$$\frac{1}{2}\sigma_{max} bh \frac{2}{3} h = Fl,$$

odavde je

$$\sigma_{max} = 3\frac{Fl}{bh^2}.$$

E. Mariotte zadržao je Galilejevu pretpostavku da se tu javljaju samo vlačne sile, odnosno da se pri deformiranju poprečni presjek okreće oko osi kroz A. Mariotteovo rješenje prihvatili su mnogi drugi istraživači kao: Jacob Bernoulli, Leonard Euler, Leibnitz i drugi. Bernoulli je pri izvođenju izraza za naprezanje pri savijanju uveo 1694. pretpostavku o ravnim presjecima, primijenio Hookeov zakon i utvrdio da je zakrivljenost deformirane osi štapa proporcionalna momentu savijanja. Na temelju toga L. Euler riješio je problem izvijanja štapa ne ulazeći u problem raspodjele naprezanja pri savijanju.



Slika 9.2. Razvoj teorije savijanja štapa

Prvo točno rješenje problema savijanja dao je 1713. francuski fizičar Parent. Međutim, Parentov prikaz nije bio dovoljno jasno iznesen i nije od suvremenika prihvaćen. Coulomb je 1773, neovisno o Parentu, dao točno rješenje, prema slici 9.2c. Ispravno je uočio da se pojavljuju vlačna i tlačna naprezanja. Rezultanta vlačnih naprezanja F_1 mora biti jednaka rezultanti tlačnih naprezanja F_2, tj.

$$F_1 = F_2 = \frac{1}{2}\sigma_{max} b\frac{h}{2} = \frac{1}{4}\sigma_{max} bh.$$

Ravnoteža momenata vanjskih i unutrašnjih sila oko točke A daje

$$F_1 \frac{2}{3} h = Fl,$$

odnosno

$$\frac{1}{4}\sigma_{max} bh \frac{2}{3} h = Fl,$$

što daje

$$\sigma_{max} = 6\frac{Fl}{bh^2}.$$

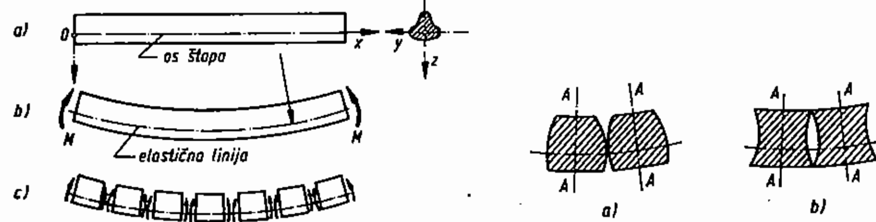
Poslije ćemo vidjeti da je to ispravno rješenje.

9.2. Naprezanja i deformacije pri čistom savijanju

Radi postupnosti ograničit ćemo se za početak na razmatranje čistog savijanja prizmatičnog štapa čiji poprečni presjek ima jednu os simetrije, kako je prikazano na slici 9.3a. Savijanje se izvodi u ravnini koja sadrži uzdužnu os štapa x i os simetrije z. Nakon opterećenja štap se deformira, a uzdužna os prelazi u zakrivljenu crtu koja se naziva *elastična* ili *progibna linija*. Pokazat ćemo da je u slučaju čistog savijanja ta crta kružnica. Zamislimo da smo štap presjekli u niz manjih dijelova, kako je prikazano na slici 9.3c. Svaki je dio geometrijski identičan, ima ista elastična svojstva i jednako je opterećen, pa će očito i zakrivljenost svakog dijela biti jednaka. Prema tome, elastična je linija krivulja koja ima konstantnu zakrivljenost, a to je kružnica.

Pretpostavke o deformiranju i raspodjeli naprezanja. Pri analizi čistog savijanja uvest ćemo ove pretpostavke o deformiranju štapa, odnosno o rasporedu naprezanja:

1. Poprečni presjeci nakon deformiranja ostaju ravni i okomiti na elastičnu liniju.
2. Sve komponente naprezanja osim σ_x jednake su nuli.



Slika 9.3. Kod čistog savijanja štapa elastična linija jest kružnica

Slika 9.4. Simetričnost elementa uvjetuje da poprečni presjeci ostaju ravni i okomiti na elastičnu liniju

Prva je pretpostavka potpuno ispunjena, što slijedi iz uvjeta simetrije. Uočimo jedan element sa slike 9.3c. Ako se lijeva strana elementa ispupči, mora se ispupčiti i desna, pa će element izgledati kao na slici 9.4a, tj. deformirani element mora biti simetričan u odnosu na raspolovnicu $A-A$, Kako se svi elementi deformiraju na isti način, takav način deformiranja doveo bi do pojave pukotina. Kad bi se

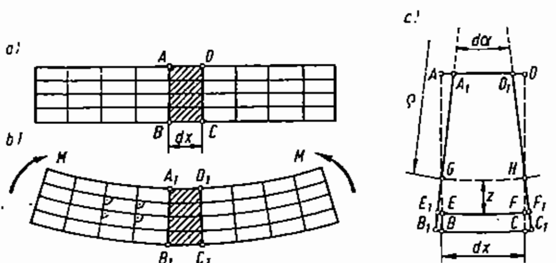
poprečni presjeci deformirali konkavno, pojavile bi se pukotine kao na slici 9.4b, što se također ne dešava. Egzaktna analiza tog problema u teoriji elastičnosti pokazuje da su obje gornje pretpostavke u cjelosti ispunjene, osim, eventualno, u neposrednoj blizini mjesta gdje djeluju spregovi, ali se taj poremećaj **po** St. Venantovu principu brzo gubi.

Izrazi za naprezanja, deformacije i pomake koje ćemo izvesti na temelju tih pretpostavki vrijedit će uz ova ograničenja:

1. visina štapa h malena je u usporedbi s rasponom l. Treba da bude $h/l \leqslant 1/5$ do 1/4 i pri tome će greška biti u granicama oko 2%;
2. maksimalni nagib tangente na elastičnu liniju α_{max} je malen. Obično se uzima da je $\alpha_{max} \leqslant 0.05$ do 0,1 rad. (2° do 5°);
3. razmatraju se naprezanja u presjecima koji su dovoljno udaljeni od krajeva štapa, oslonaca i mjesta gdje djeluje koncentrirano opterećenje. Dovoljnom udaljenošću može se smatrati visina štapa h.

Prvo ograničenje odnosi se podjednako na određivanje pomaka i naprezanja. Drugo ograničenje presudnije je za određivanje pomaka i omogućuje nam da umjesto nelinearne dobijemo linearnu diferencijalnu jednadžbu elastične linije. Treće ograničenje značajno je za određivanje naprezanja i nema većeg značenja kod određivanja pomaka. Ponekad se umjesto malog nagiba tangente zahtijeva da je omjer maksimalnog progiba i raspona malen. U tom slučaju treba biti $w_{max}/l < 0{,}01$ do 0,02.

Geometrijska analiza. Zamislimo prizmatični štap na čijoj je strani ucrtana pravokutna mreža kao na slici 9.5a. Nakon opterećenja horizontalne crte prelaze u kružnice, a vertikalne crte se naginju i ostaju okomite na te kružnice, slika 9.5b. Pravokutni elementi se deformiraju, ali ostaju ortogonalni, tj. stranice deformiranog elementa sijeku se pod pravim kutom. Uzdužna vlakna na gornjoj strani štapa



Slika 9.5. Geometrijska analiza deformiranja štapa opterećenog na čisto savijanje

skraćuju se, a na donjoj strani produljuju. Negdje u sredini grede postoje vlakna koja ne mijenjaju duljinu. Ta vlakna tvore neutralnu površinu štapa. Odaberimo ishodište koordinatnog sustava na neutralnoj površini. Uočit ćemo jedan element štapa, npr. $ABCD$. Taj je element uvećano prikazan na slici 9.5c. Crtkano je prikazan početni oblik elementa $ABCD$, a punom crtom deformirani element.

Deformacija vlakna EF iznosi: $\varepsilon_x = \dfrac{\overline{E_1F_1} - \overline{EF}}{\overline{EF}}$,

gdje je $\overline{EF} = \overline{GH} = dx = \rho\, d\alpha$ duljina vlakna prije deformiranja, a $\overline{E_1F_1} = (\rho + z)\, d\alpha$ duljina vlakna nakon deformiranja, tako da je

$$\varepsilon_x = \frac{(\rho + z)\, d\alpha - \rho\, d\alpha}{\rho\, d\alpha}$$

odnosno

$$\varepsilon_x = \frac{z}{\rho}. \qquad (9.1)$$

Izraz (9.1) pokazuje da se deformacija ε_x mijenja linearno po presjeku nosača. U neutralnoj površini nosača jednake su nuli: s jedne strane su pozitivne a s druge negativne. Kad bismo znali polumjer zakrivljenosti elastične linije ρ i položaj neutralne površine (npr. udaljenost $\overline{AG}$ na slici 9.5c), mogli bismo pomoću tog izraza odrediti ε_x na svakom mjestu. Međutim, ti su nam parametri nepoznati, pa izraz (9.1) daje samo kvalitativan raspored a ne i veličinu deformacija.

Primjena Hookeova zakona. Pomoću izraza (9.1) i Hookeova zakona možemo dobiti izraz za raspodjelu naprezanja. Kako, prema pretpostavci, u štapu vlada jednoosno stanje naprezanja, bit će

$$\sigma_x = \varepsilon_x E = \frac{E}{\rho} z. \qquad (9.2)$$

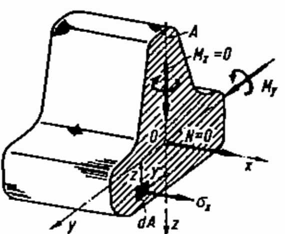
Primjena uvjeta ravnoteže. Položaj neutralne površine i polumjer zakrivljenosti ρ odredit ćemo pomoću uvjeta ravnoteže koji prema slici 9.6 glase:

$$N = \int_A \sigma_x\, dA = 0 \qquad (9.3)$$

$$M_y = \int_A \sigma_x z\, dA \qquad (9.4)$$

$$M_z = -\int_A \sigma_x y\, dA = 0. \qquad (9.5)$$

Izraz (9.3) analogan je izrazu (5.15), a izrazi (9.4) i (9.5) izrazima (5.18) i (5.19).



Slika 9.6. Ravnoteža elementa štapa opterećenog na čisto savijanje

Uvrstimo li izraz (9.2) u (9.3), dobit ćemo

$$\int_A \frac{E}{\rho} z \, dA = 0.$$

Modul elastičnosti E i polumjer zakrivljenosti ρ konstantni su za dani presjek pa se mogu izvući pred znak integrala, tj.

$$\frac{E}{\rho}\int_A z \, dA = 0. \tag{9.6}$$

Kako je $E/\rho \neq 0$, mora integral u izrazu (9.6) biti jednak nuli. Taj integral predstavlja statički moment presjeka oko osi y. Prema tome os y prolazi kroz težište poprečnog presjeka. Uvrštavanjem izraza (9.2) u (9.4) slijedi

$$M_y = \frac{E}{\rho}\int_A z^2 \, dA.$$

Kako je $\int_A z^2 \, dA = I_y$, možemo pisati

$$M_y = \frac{EI_y}{\rho},$$

odnosno

$$\frac{1}{\rho} = \varkappa = \frac{M_y}{EI_y}, \tag{9.7}$$

gdje je $\varkappa$ zakrivljenost elastične linije. Uvrstimo li izraz (9.2) u (9.5), dobit ćemo

$$M_z = -\frac{E}{\rho}\int_A yz \, dA = -\frac{E}{\rho} I_{yz} = 0.$$

Kako je $I_{yz}=0$, osi y i z su glavne osi tromosti poprečnog presjeka A. Pomoću izraza (9.2) i (9.7) možemo dobiti

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z. \tag{9.8}$$

Izraz (9.8) omogućava nam da u svakoj točki presjeka štapa odredimo naprezanje σ_x. U tu svrhu potrebno je odrediti moment savijanja M_y u promatranom presjeku kao i moment tromosti presjeka I_y. Kad smo odredili σ_x, možemo lako pomoću izraza (9.2) odrediti deformaciju ε_x i polumjer zakrivljenosti elastične linije ρ.

PRIMJER 9.1

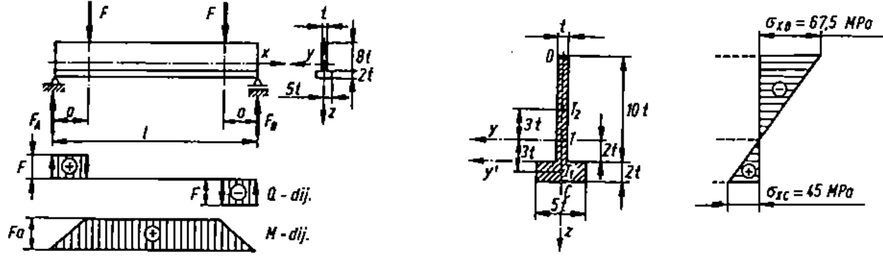
Za nosač zadan i opterećen prema slici 9.7 treba skicirati raspored normalnih naprezanja po presjeku u sredini raspona. Zadano: $F = 20$ kN, $a = 1,2$ m, $t = 2$ cm.

Nosač je simetrično opterećen, pa su reakcije F_A i F_B jednake i iznose $F_A = F_B = F$. Dijagram momenata savijanja i poprečnih sila prikazan je na slici 9.7. Vidimo da u srednjem presjeku nema poprečne sile, a moment savijanja iznosi

$$M_y = Fa = 20 \cdot 1,2 = 24 \text{ kNm}. \tag{a}$$

Kako u srednjem presjeku imamo čisto savijanje, možemo primijeniti izraz (9.8), tj.

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z. \tag{b}$$



Slika 9.7. Greda koja je u srednjem dijelu opterećena na čisto savijanje

Slika 9.8. Raspored naprezanja zbog savijanja po visini nesimetričnog presjeka

Moment tromosti presjeka I_y odredit ćemo pomoću slike 9.8. Težište poprečnog presjeka nalazi se na osi z jer je to os simetrije. Da bismo odredili koordinatnu z'_T, odabrat ćemo pomoćnu os y' tako da dijeli presjek u dva dijela: A_1 i A_2. U tom je slučaju

$$A_1 = 10\,t^2, \; z'_1 = t$$

$$A_2 = 10\,t^2, \; z'_2 = -5\,t,$$

pa će biti

$$z'_T = \frac{A_1 z'_1 + A_2 z'_2}{A_1 + A_2} = \frac{10t^2 \cdot t + 10t^2(-5t)}{20t^2} = -2t.$$

Moment tromosti oko težišne osi y iznosi

$$I_y = \frac{5t\,(2t)^3}{12} + 10t^2\,(3t)^2 + \frac{t\,(10t)^3}{12} + 10t^2\,(3t)^2$$

$$I_y = 266,66\,t^4 = 4266,56 \text{ cm}^4. \tag{c}$$

Naprezanje u donjem vlaknu jest

$$\sigma_{xc} = \frac{M_y}{I_y} z_c = \frac{24 \cdot 10^3}{4266,56 \cdot 10^{-8}} 8 \cdot 10^{-2}.$$

Odavde izlazi

$$\sigma_{xc} = 0,045 \cdot 10^9 \text{ Pa} = 45 \text{ MPa}.$$

Na sličan način možemo dobiti iznos naprezanja u gornjem vlaknu:

$$\sigma_{xD} = -67,5 \text{ MPa}.$$

9.3. Normalna i posmična naprezanja pri savijanju silama

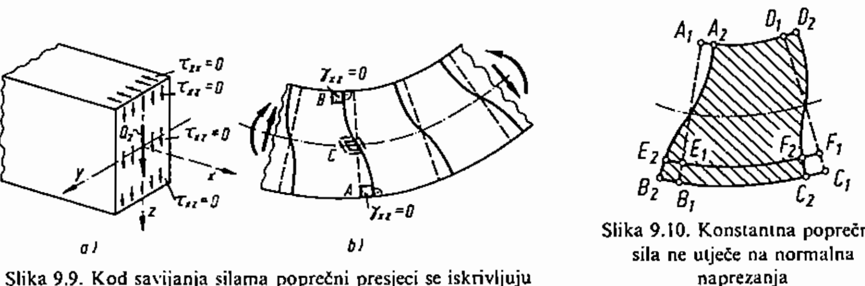
Kod čistog savijanja u poprečnom presjeku pojavljuju se samo normalna naprezanja koja se reduciraju na moment savijanja M_y, tj.

$$\int_A \sigma_x z \, dA = M_y.$$

Kako ta naprezanja ne doprinose pojavi poprečne sile, neminovno se moraju kod poprečnog savijanja pojaviti posmična naprezanja τ_{xz} tako da je

$$\int_A \tau_{xz} \, dA = Q_z.$$

Razmotrimo podrobnije raspored posmičnih naprezanja, prema slici 9.9. Na gornjoj i donjoj površini štapa posmična naprezanja moraju biti jednaka nuli jer te površine nisu opterećene. Kako su posmična naprezanja u parovima jednaka, bit će uz gornji i donji rub poprečnog presjeka $\tau_{xz} = \tau_{zx} = 0$, pa je uz te rubove i $\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = 0$, kako je prikazano na slici 9.9b.



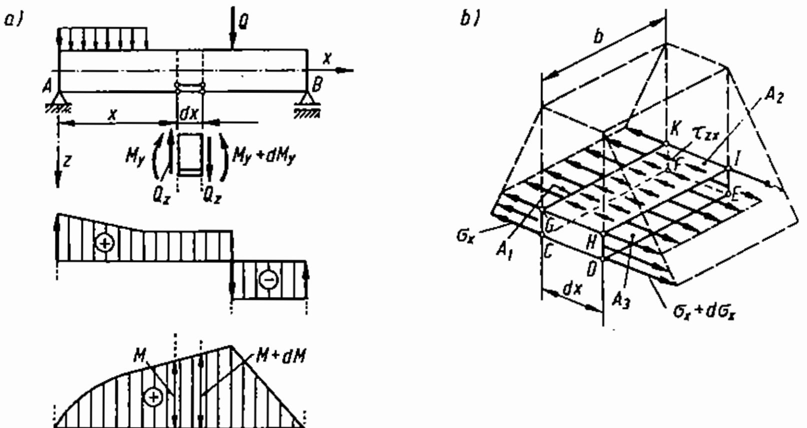
Slika 9.9. Kod savijanja silama poprečni presjeci se iskrivljuju

Slika 9.10. Konstantna poprečna sila ne utječe na normalna naprezanja

Vidjeli smo da u slučaju čistog savijanja pravokutni elementi nakon deformiranja ostaju ortogonalni, kako je prikazano na slici 9.5b. U slučaju pojave posmičnih naprezanja, odnosno kutnih deformacija, elementi u nutrini štapa ne mogu ostati ortogonalni jer se pravi kutovi moraju promijeniti, kako prikazuje element C na slici 9.9b. Međutim, elementi A i B, za koje je $\gamma_{xz} = 0$, ostaju pravokutni. Prema tome, pri savijanju silama mora doći do iskrivljenja (deplanacije) poprečnog presjeka.

Ako je raspon grede l mnogo veći od visine poprečnog presjeka h, pomaci zbog deplanacije zanemarivo su maleni u usporedbi s pomacima koji nastaju zbog rotacije poprečnog presjeka, koja bi nastala pri čistom savijanju. U tom slučaju možemo zadržati pretpostavku da poprečni presjeci ostaju ravni nakon deformiranja štapa i okomiti na elastičnu liniju, pa izrazi (9.7) i (9.8) vrijede približno za savijanje silama. Pogreška je to manja što je manji omjer h/l. U slučaju konstantne poprečne sile svaki poprečni presjek deplanira se na isti način, tako da ta deplanacija ne utječe na deformaciju ε_x. Na slici 9.10 crtkano je prikazano kako bi se ortogonalni element $A_1B_1C_1D_1$ deformirao u slučaju čistog savijanja, a punom crtom element s deplaniranim stranama $A_2B_2C_2D_2$. Pri jednakoj deplanaciji (Q_z = konst.) bit će $\overline{E_1F_1} = \overline{E_2F_2}$, tj. deplanacija ne utječe na produljenje vlakna $\overline{EF}$, pa time ni na deformaciju ε_x, odnosno naprezanje σ_x. U tom su slučaju izrazi (9.7) i (9.8) egzaktni.

Izraz za posmična naprezanja dobit ćemo razmatranjem grede na slici 9.11a. Uočimo iscrtani element duljine dx. S lijeve strane tog elementa djeluje moment M_y i poprečna sila Q_z, a s desne strane moment $M_y + dM_y$ i poprečna sila Q_z, kako je naznačeno na slici. Kako normalna naprezanja σ_x ovise o momentu, bit će naprezanja na obje strane različita. Taj je element prikazan aksonometrijski i uvećano na slici 9.11b. Na njemu su ucrtana samo naprezanja paralelna s osi x. Na



Slika 9.11. Kod poprečnog savijanja osim normalnih naprezanja javljaju se i posmična naprezanja

presjeku A_1 ($CFKG$) djeluje naprezanje σ_x, a na presjeku A_3 ($DEIH$) naprezanja $\sigma_x + d\sigma_x$. Kako su površine A_1 i A_3 jednake, ta naprezanja ne mogu biti u ravnoteži, što uvjetuje pojavu posmičnih naprezanja τ_{zx} na presjeku A_2 ($GHIK$). Ravnoteža tog elementa u smjeru osi x glasi

$$\Sigma F_x = -\int_{A_1} \sigma_x \, dA_1 - \int_{A_2} \tau_{zx} \, dA_2 + \int_{A_3} (\sigma_x + d\sigma_x) \, dA_3.$$

Iako je dužina dx radi jasnoće nacrtana u istom redu veličine kao i b, ona je infinitezimalno mala veličina, dok je b konačna veličina. Zbog toga možemo smatrati da je τ_{zx} konstantno po presjeku A_2. Kako je $A_1 = A_3$ i $A_2 = b\,dx$, uz pomoć izraza (9.8) možemo pisati

$$-\int_{A_1} \frac{M_y}{I_y} z \, dA_1 - \tau_{zx} b \, dx + \int_{A_3} \frac{M_y + dM_y}{I_y} z \, dA_1,$$

odnosno

$$\tau_{zx} b \, dx = \frac{dM_y}{I_y} \int_{A_1} z \, dA_1$$

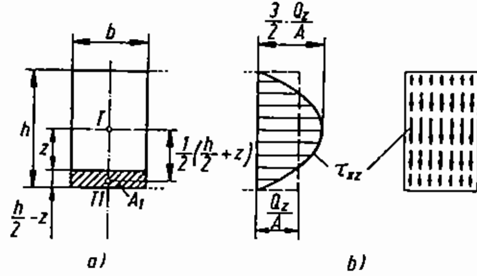
$$\tau_{zx} = \frac{dM_y}{dx} \frac{S_y}{b I_y},$$

gdje je $S_y = \int z \, dA_1$ statički moment dijela presjeka A_1, odnosno A_3 oko neutralne osi y. Prema izrazu (5.10a) je $dM_y/dx = Q_z$, pa izraz za τ_{zx} glasi

$$\tau_{zx} = \frac{Q_z S_y}{b I_y}. \tag{9.9}$$

PRIMJER 9.2

Odrediti zakon raspodjele posmičnih naprezanja za pravokutni presjek zadan prema slici 9.12a.



Slika 9.12. Raspored posmičnih naprezanja po pravokutnom presjeku

Površina iscrtanog dijela iznosi $A_1 = b\,(h/2 - z)$, a udaljenost težišta od osi y je $(h/2 + z)/2$. Statički moment te plohe oko osi y jest

$$S_y = b\left(\frac{h}{2} - z\right)\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + z\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right).$$

Moment tromosti pravokutnog presjeka jest $I_y = b h^3/12$, pa posmično naprezanje na udaljenosti z od osi y prema izrazu (9.9) iznosi

$$\tau_{zx} = \frac{Q_z S_y}{b I_y} = \frac{6 Q_z}{b h^3}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right).$$

Posmična su naprezanja raspodijeljena po zakonu parabole. Maksimalno posmično naprezanje javlja se u sredini nosača, tj. za $z = 0$

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{Q_z}{b h} = \frac{3}{2}\frac{Q_z}{A},$$

gdje je A površina poprečnog presjeka. U tom je slučaju maksimalno posmično naprezanje 50% veće od prosječnog.

PRIMJER 9.3

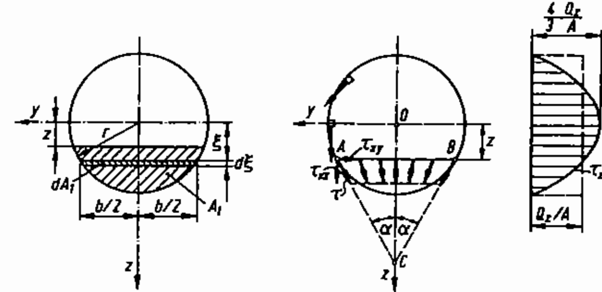
Odrediti raspored posmičnih naprezanja u kružnom presjeku prema slici 9.13a. Zadano: Q_z, r.

Statički moment iscrtane plohe A_1, prema slici 9.13a, odredit ćemo integriranjem. Element površine iznosi

$$dA_1 = b \, d\xi = 2\sqrt{r^2 - \xi^2} \, d\xi,$$

pa je statički moment plohe A_1 oko osi y

$$S_y = \int_{A_1} \xi \, dA_1 = 2\int_z^r \sqrt{r^2 - \xi^2} \, \xi \, d\xi = \frac{2}{3}(r^2 - z^2)^{3/2}.$$



Slika 9.13. Raspored posmičnih naprezanja po kružnom presjeku

Posmično naprezanje dobit ćemo pomoću izraza (9.9), tj.

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y}{b I_y} = \frac{Q_z}{I_y}\frac{\frac{2}{3}(r^2 - z^2)^{3/2}}{2(r^2 - z^2)^{1/2}} = \frac{Q_z}{3 I_y}(r^2 - z^2).$$

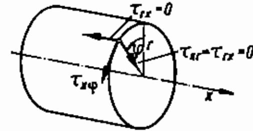
Uzmemo li u obzir da je $I_y = \pi d^4/64 = \pi r^4/4$, bit će

$$\tau_{xz} = \frac{4}{3}\frac{Q_z}{\pi r^4}(r^2 - z^2).$$

U krajnjim vlaknima, tj. za $z = r$ naprezanje je jednako nuli, a u sredini presjeka $z = 0$ ima maksimalnu vrijednost:

$$\tau_{xz\,max} = \frac{4}{3}\frac{Q_z}{\pi r^2} = \frac{4}{3}\frac{Q_z}{A}.$$

Prema tome je maksimalno naprezanje u tom slučaju za 33% veće od prosječnog. Raspored posmičnih naprezanja prikazan je na slici 9.13c.



Slika 9.14. Na rubu poprečnog presjeka posmično naprezanje djeluje paralelno s rubom

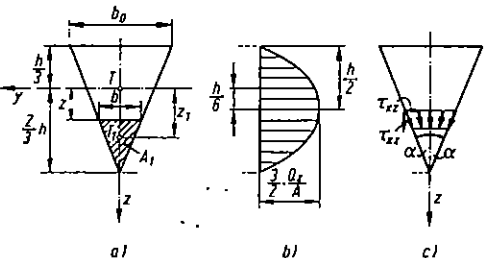
Posmično naprezanje ne može imati komponentu okomitu na neopterećen rub poprečnog presjeka, tj. posmično naprezanje je tangencijalno na rub presjeka, kako je prikazano na slici 9.14. Uočimo dužinu AB na slici 9.13b. Posmično naprezanje u točkama A i B djeluje u smjeru tangente na rub i ima dvije komponente: τ_{xz} i τ_{xy}. Mi smo izračunali samo τ_{xz}. Ukupno posmično naprezanje τ iznosi

$$\tau = \frac{\tau_{xz}}{\cos\alpha}.$$

Iz uvjeta simetrije možemo zaključiti da su posmična naprezanja na osi z s njom paralelna. Podrobnija analiza pokazala bi da su sva naprezanja na dužini AB usmjerena prema točki C, kako je prikazano na slici 9.13b.

PRIMJER 9.4

Za trokutasti presjek, prema slici 9.15, naći veličinu i mjesto maksimalnog posmičnog naprezanja. Skicirati raspored naprezanja po presjeku.



Slika 9.15. Raspored posmičnih naprezanja u trokutnom presjeku

Kako je površina iscrtane plohe $A_1 = \frac{b}{2}\left(\frac{2}{3}h - z\right)$, a udaljenost težišta te plohe od osi y

$$z_1 = z + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}h - z\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{h}{3} + z\right),$$

njen statički moment oko osi y iznosi

$$S_y = A_1 z_1 = \frac{b}{3}\left(\frac{2}{3}h - z\right)\left(\frac{h}{3} + z\right).$$

Prema izrazu (4.23) moment tromosti trokuta jest

$$I_y = \frac{b_0 h^3}{36}.$$

Posmično naprezanje na udaljenosti z od osi y iznosi

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y}{b I_y} = \frac{12 Q_z}{b_0 h^3}\left(\frac{2}{9}h^2 + \frac{h}{3}z - z^2\right). \qquad \text{(a)}$$

I u tom su slučaju posmična naprezanja raspoređena po zakonu parabole. Mjesto maksimalnog posmičnog naprezanja dobit ćemo ako izraz za τ_{xz} deriviramo po z i izjednačimo s nulom, tj.

$$\frac{d\tau_{xz}}{dz} = \frac{12 Q_z}{b_0 h^3}\left(\frac{h}{3} - 2z\right) = 0.$$

Odavde dobivamo da se maksimalno posmično naprezanje javlja na mjestu $z = h/6$, što uvršteno u (a) daje

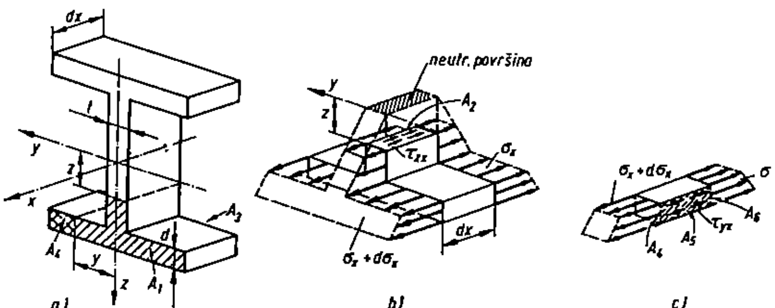
$$\tau_{xz\,max} = 3\frac{Q_z}{b_0 h} = \frac{3}{2}\frac{Q_z}{A}. \qquad \text{(b)}$$

To naprezanje nije ujedno i maksimalno. Stvarno je uz rub posmično naprezanje paralelno s rubom i ima komponente τ_{xz} i τ_{xy}, kako je prikazano na slici 9.15c. To maksimalno naprezanje iznosi približno

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{Q_z}{A}\frac{1}{\cos\alpha}. \qquad \text{(c)}$$

9.4. Posmična naprezanja u simetričnim tankostjenim nosačima

Postupak izračunavanja posmičnih naprezanja u tankostjenim nosačima objasnit ćemo na primjeru I-nosača, čiji je element prikazan na slici 9.16a. Da bismo odredili posmična naprezanja u rebru, presjeći ćemo nosač horizontalnom ravninom.



Slika 9.16. Posmična naprezanja u I-profilu

Presječeni dio s ucrtanim naprezanjima, koja su paralelna s osi x, prikazan je na slici 9.16b. Na mjestu horizontalnog presjeka pojavit će se posmična naprezanja τ_{zx}. Uvjet ravnoteže tog dijela nosača glasi

$$\Sigma F_x = \int_{A_1} (\sigma_x + d\sigma_x)\, dA_1 - \tau_{zx} A_2 - \int_{A_3} \sigma_x\, dA_3.$$

Kako je $A_3 = A_1$, $A_2 = dx\, t$ i $d\sigma_x = \frac{dM_y}{I_y} z$, možemo pisati

$$\frac{dM_y}{I_y}\int_{A_1} z\, dA_1 = \tau_{zx}\, t\, dx,$$

odnosno

$$\tau_{zx}=\frac{\mathrm{d}M_y}{\mathrm{d}x}\frac{S_y}{tI_y}=\frac{Q_z S_y}{tI_y}, \tag{9.10}$$

gdje je $S_y=\int z\,\mathrm{d}A_1$ statički moment površine A_1 oko osi y, a t debljina rebra. Izraz za posmična naprezanja τ_{yx} dobit ćemo presijecanjem pojasa vertikalnom ravninom. Odsječeni dio prikazan je na slici 9.16c. Uvjet ravnoteže tog dijela glasi

$$\int_{A_4}(\sigma_x+\mathrm{d}\sigma_x)\mathrm{d}A_4-\tau_{yx}A_5-\int_{A_6}\sigma_x\mathrm{d}A_6=0.$$

Kako je $A_4=A_6$, $A_5=\mathrm{d}x\,d$ i $\mathrm{d}\sigma_x=\frac{\mathrm{d}M_y}{I_y}z$, bit će

$$\frac{\mathrm{d}M_y}{I_y}\int_{A_4}z\,\mathrm{d}A_4=\tau_{yx}\mathrm{d}x\,d,$$

odnosno

$$\tau_{yx}=\frac{\mathrm{d}M_y}{\mathrm{d}x}\frac{\int z\,\mathrm{d}A_4}{I_y d}.$$

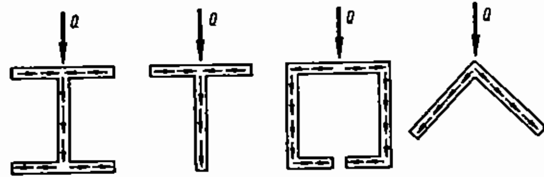
Uzmemo li u obzir da je

$$\frac{\mathrm{d}M_y}{\mathrm{d}x}=Q_z \quad \text{i} \quad \int z\,\mathrm{d}A_4=S_y,$$

statički moment dvostruko iscrtane površine A_4 oko osi y bit će

$$\tau_{yx}=\frac{Q_z S_y}{I_y d}. \tag{9.11}$$

Izrazi (9.10) i (9.11) daju samo apsolutnu vrijednost posmičnog naprezanja. Smjer naprezanja τ_{xz} podudara se uvijek sa smislom poprečne sile Q_z, a smjer τ_{xy} je takav da posmična naprezanja čine tok sličan toku tekućine u kanalima, kako je to ilustrirano na slici 9.17. Raspodjelom posmičnih naprezanja u nesimetričnim tankostjenim nosačima pozabavit ćemo se u drugom dijelu nauke o čvrstoći kad budemo govorili o centru uvijanje.



Slika 9.17. Tok posmičnih naprezanja u simetričnim tankostjenim profilima

PRIMJER 9.5

Za tankostjeni I-presjek prema slici 9.18 skicirati raspored posmičnih naprezanja. Zadano: Q_z, t, $h=24t$, $b=12t$.

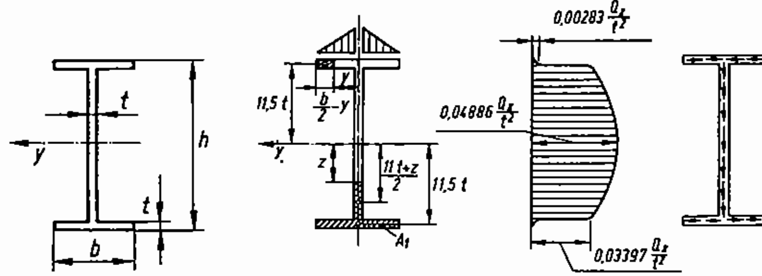
Da bismo mogli naći raspored posmičnih naprezanja, treba odrediti moment tromosti poprečnog presjeka. Slično kao u primjeru 4.1 moment tromosti iznosi

$$I_y=\frac{12t(24t)^3}{12}-\frac{11t(22t)^3}{12}=4063\,t^4. \tag{a}$$

Pri određivanju momenata tromosti tankostjenih nosača možemo zanemariti vlastite momente tromosti pojasova, tj. možemo uzeti da je približno

$$I_y=\frac{t(22t)^3}{12}+2\cdot 12t^2(11{,}5t)^2 \tag{b}$$

$$I_y=4061\,t^4.$$



Slika 9.18. Poprečni presjek tankostjenog I-nosača

Slika 9.19. Posmična naprezanja u I-presjeku

Prvi član desne strane izraza (b) predstavlja moment tromosti rebra, a drugi član Steinerov dodatak za pojasove. Vidimo da smo zanemarivanjem vlastitih momenata tromosti pojasova napravili neznatnu grešku, koja je manja od 0,1%.

Statički moment površine A_1, prema slici 9.19, iznosi

$$S_y=12t^2\,11{,}5t+t(11t-z)\frac{11t+z}{2}=198{,}5\,t^3-0{,}5\,tz^2.$$

Posmično naprezanje u rebru dano je izrazom (9.10), tj.

$$\tau_{xz}=\frac{Q_z S_y}{tI_y}=\frac{Q_z}{I_y}\frac{198{,}5\,t^3-0{,}5\,tz^2}{t}$$

$$\tau_{xz}=\frac{Q_z}{I_y}(198{,}5\,t^2-0{,}5\,z^2). \tag{c}$$

To je naprezanje raspoređeno po zakonu parabole i u sredini iznosi

$$\tau_{max}=\frac{Q_z}{I_y}198{,}5\,t^2=\frac{Q_z\,198{,}5\,t^2}{4063\,t^4}=0{,}04886\frac{Q_z}{t^2}. \tag{d}$$

Na krajevima rebra ($z=11\,t$) posmično je naprezanje

$$\tau_{xz}=\frac{Q_z}{I_y}(198{,}5-0{,}5\cdot 11^2)\,t^2=138\frac{Q_z}{I_y}t^2$$

$$\tau_{xz}=\frac{138\,t^2}{4063\,t^4}\,Q_z=0{,}03397\frac{Q_z}{t^2}.$$

Posmično naprezanje u pojasovima, prema izrazu (9.11), iznosi

$$\tau_{xy}=\frac{Q_z\,S_y}{I_y d},$$

gdje je d debljina pojasa ($d=t$). S_y je statički moment površine A_2 koji, prema slici 9.19, iznosi

$$S_y=\left(\frac{b}{2}-y\right)t\cdot 11{,}5\,t=(6\,t-y)\,t\cdot 11{,}5\,t=69\,t^3-11{,}5\,t^2\,y,$$

što uvršteno u izraz (9.11) daje

$$\tau_{xy}=\frac{Q_z}{I_y}(69\,t^2-11{,}5\,ty). \qquad \text{(e)}$$

Posmično naprezanje u pojasu mijenja se po linearnom zakonu i za $y=6\,t$ iznosi $\tau_{xy}=0$, a za $y=0{,}5\,t$:

$$\tau_{xy}=63{,}25\,t^2\frac{Q_z}{I_y}=63{,}25\,\frac{Q_z\,t^2}{4063\,t^4}$$

$$\tau_{xy}=0{,}01557\frac{Q_z}{t^2}$$

Dio poprečne sile koju prenosi rebro iznosi

$$Q_{\text{reb}}=\int_{-11\,t}^{11\,t}\tau_{xz}\,t\,\mathrm{d}z.$$

Uvrstimo li izraz (c) u gornji izraz, dobit ćemo

$$Q_{\text{reb}}=2\,t\frac{Q_z}{I_y}\int_0^{11\,t}(198{,}5\,t^2-0{,}5\,z^2)\,\mathrm{d}z=$$

$$=2\,t\frac{Q_z}{I_y}\left[198{,}5\,t^2z-0{,}5\frac{z^3}{3}\right]_0^{11\,t}$$

$$Q_{\text{reb}}=3923\,t^4\frac{Q_z}{I_y}=0{,}9656\,Q_z.$$

Vidimo da rebro prenosi pretežni dio poprečne sile. Maksimalno posmično naprezanje u tankostjenim nosačima približno možemo dobiti ako ukupnu poprečnu silu podijelimo s površinom rebra, tj.

$$\tau_{\max}\approx\frac{Q_z}{A_{\text{reb}}}=\frac{Q_z}{22\,t^2}=0{,}4545\frac{Q_z}{t^2}.$$

Ta se vrijednost razlikuje od prave vrijednosti za oko 8%.

Prosječna vrijednost τ'_{xz} u pojasu na mjestu spoja pojasa i rebra 12 je puta manja od naprezanja u rebru jer je širina 12 puta veća i iznosi

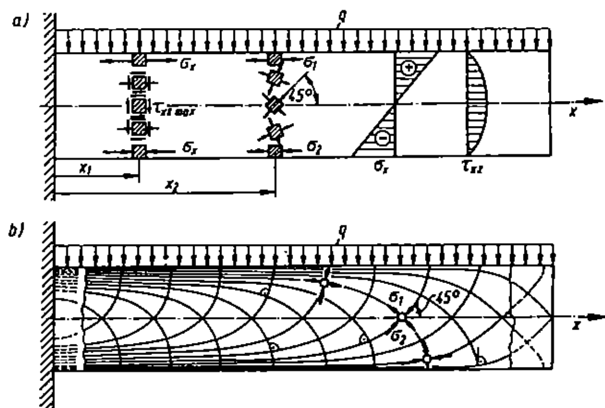
$$\tau'_{xz}=\frac{0{,}03397}{12}\frac{Q_z}{t^2}=0{,}00283\frac{Q_z}{t^2}.$$

9.5. Glavna naprezanja i trajektorije naprezanja

Pri savijanju silama u poprečnim presjecima grede javljaju se normalna i posmična naprezanja koja su određena izrazima

$$\sigma_x=\frac{M_y}{I_y}z \qquad \text{i} \qquad \tau_{xz}=\frac{Q_z\,S_y}{b\,I_y}.$$

Normalna naprezanja mijenjaju se po linearnom zakonu, a posmična naprezanja u većini slučajeva po zakonu parabole. Normalna su naprezanja na neutralnoj površini jednaka nuli, a prema krajevima rastu. Nasuprot tome posmična naprezanja imaju maksimum u nutrini presjeka i opadaju prema kraju, gdje su jednaka nuli.



Slika 9.20. Glavna naprezanja i trajektorije naprezanja

Normalna naprezanja σ_z jednaka su nuli ili zanemarivo malena, pa ih nećemo uzeti u razmatranje. Na slici 9.20a prikazana je konzola pravokutnog poprečnog presjeka koja je jednoliko kontinuirano opterećena. U presjeku x_1 ucrtano je pet elemenata i na njima odgovarajuća posmična i normalna naprezanja. U presjeku x_2 prikazana su glavna naprezanja.

Duž rubova σ_x je jedno glavno naprezanje, dok je drugo glavno naprezanje jednako nuli. U sredini štapa imamo čisto smicanje, pa glavna naprezanja čine kut od 45° s osi x. Oba glavna naprezanja po apsolutnoj su vrijednosti jednaka posmičnom naprezanju. Na slici 9.20b prikazane su trajektorije naprezanja. To su dvije ortogonalne porodice (familije) krivulja. Kroz svaku točki prolaze dvije trajektorije, po jedna iz svake porodice. Tangente na te krivulje podudaraju se s pravcima glavnih naprezanja u odgovarajućoj točki.

9.6. Proračun čvrstoće, racionalni oblici poprečnog presjeka

U općem slučaju savijanja grede pojavljuju se normalna i posmična naprezanja; međutim, za uobičajene raspone i oblike poprečnog presjeka normalna su naprezanja mnogo veća od posmičnih, pa se proračun čvrstoće izvodi prema najvećem normalnom naprezanju. U prilog tome je i činjenica da posmično naprezanje iščezava tamo gdje je normalno naprezanje najveće, tj. u krajnjim vlaknima poprečnog presjeka. Prema tome, uvjet čvrstoće pri savijanju glasi

$$\sigma_{x\,\max}=\frac{M_{y\max}}{I_y}z_{\max}=\frac{M_{y\max}}{W_y}\leqslant\sigma_{\text{dop}}, \tag{9.12}$$

gdje je $W_y=I_y/z_{\max}$ aksijalni moment otpora, $z_{\max}$ udaljenost krajnjeg vlakna od neutralne osi i σ_{dop} dopušteno normalno naprezanje. Ovdje smo pretpostavili da materijal grede ima jednaku vlačnu i tlačnu čvrstoću. Da bi bio ispunjen uvjet čvrstoće, oblik i dimenzije poprečnog presjeka grede moraju biti tako odabrani da je

$$W_y\geqslant\frac{M_{y\max}}{\sigma_{\text{dop}}}. \tag{9.13}$$

Primjenu tog izraza ilustrirat ćemo na slijedećem primjeru.

PRIMJER 9.6

Za gredu zadanu i opterećenu prema slici 9.21a odrediti dimenzije poprečnog presjeka ako poprečni presjek ima oblik: a) kruga, b) pravokutnika $h/b=3$, c) I-profila, prema slici 9.18. Zadano: $F=5\,\text{kN}$, $a=0{,}2$, $\sigma_{\text{dop}}=120\,\text{MPa}$.

Da bismo mogli dimenzionirati poprečni presjek, potrebno je skicirati dijagrame poprečnih sila i momenata savijanja, tj. odrediti mjesto i veličinu maksimalnog momenta $M_{\max}$. Prije toga odredit ćemo reakcije u osloncima pomoću uvjeta ravnoteže koji glase:

$$\Sigma M_A=F_B\,10a-F\,8a-\frac{F}{2a}4a\,2a=0 \tag{a}$$

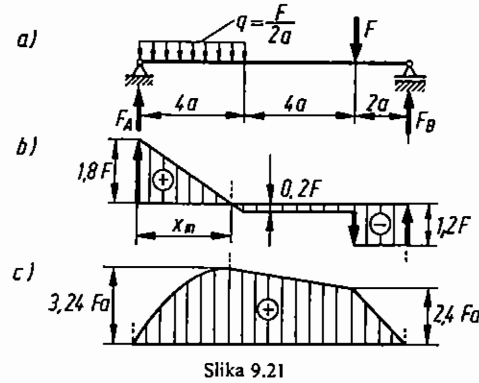
$$\Sigma M_B=\frac{F}{2a}4a\,8a+F\,2a-F_A\,10a=0. \tag{b}$$

Rješenjem jednadžbi (a) i (b) dobit ćemo

$$F_A=1{,}8F,\qquad F_B=1{,}2F.$$

Dijagram poprečnih sila izgleda kao na slici 9.21b. Maksimalni moment savijanja bit će na mjestu x_m, gdje je poprečna sila jednaka nuli. Vrijednost x_m odredit ćemo tako da izraz za poprečnu silu izjednačimo s nulom, tj. za $x\leqslant 4a$

$$Q_z=F_A-q\,x_m=0.$$



Slika 9.21

Odavde je

$$x_m=\frac{F_A}{q}=\frac{1{,}8F}{F/2a}=3{,}6a.$$

Sada je

$$M_{\max}=F_A\cdot x_m-q\frac{x_m^2}{2}$$

$$M_{\max}=1{,}8F\,3{,}6a-\frac{F}{2a}\frac{(3{,}6a)^2}{2}=3{,}24\,Fa=3{,}24\,\text{kNm}.$$

Moment savijanja ispod sile F iznosi

$$M_y=F_B\,2a=2{,}4\,Fa\doteq2{,}4\,\text{kNm}.$$

Dijagram momenata savijanja prikazan je na slici 9.21c.

a) Kako je u tom slučaju $W_y=\dfrac{\pi d^3}{32}$, uvjet čvrstoće glasi

$$W_y=\frac{\pi d^3}{32}\geqslant\frac{M_{\max}}{\sigma_{\text{dop}}},$$

odnosno

$$d\geqslant\sqrt[3]{\frac{32M_{\max}}{\pi\sigma_{\text{dop}}}}.$$

Nakon uvrštavanja zadatih podataka dobit ćemo

$$d \geqslant \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 3240}{120 \cdot 10^6}} = 0{,}065\,\mathrm{m} = 65\,\mathrm{mm}.$$

Površina poprečnog presjeka iznosi

$$A_a = \frac{\pi d^2}{4} = 3318\,\mathrm{mm}^2.$$

b) Moment otpora pravokutnog presjeka jest $W_y = bh^2/6$. U tom slučaju potrebno je odrediti dvije veličine iz jedne jednadžbe, pa možemo naći beskonačno mnogo kombinacija b i h. Zbog toga je potrebno zadati ili odabrati omjer h/b. Kako je u zadatku zadano $h/b = 3$, bit će

$$W_y = \frac{b\,(3b)^2}{6} = \frac{3}{2} b^3 \geqslant \frac{M_{max}}{\sigma_{dop}}.$$

Odavde je

$$b = \sqrt[3]{\frac{2M_{max}}{3\sigma_{dop}}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 3240}{3 \cdot 120 \cdot 10^6}},$$

$$b = 2{,}62\,10^{-2}\,\mathrm{m} = 26{,}2\,\mathrm{mm}.$$

Površina poprečnog presjeka iznosi

$$A_b = 3b^2 = 2059\,\mathrm{mm}^2.$$

c) Prema primjeru 9.5 moment tromosti iznosi

$$I_y = 4063\,t^4.$$

Moment otpora jest

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{4063\,t^4}{12\,t} = 338{,}6\,t^3.$$

pa uvjet čvrstoće glasi

$$W_y = 338{,}6\,t^3 \geqslant \frac{M_{max}}{\sigma_{dop}}.$$

Odavde je

$$t = \sqrt[3]{\frac{M_{max}}{338{,}6\,\sigma_{dop}}} = \sqrt[3]{\frac{3240}{338{,}6 \cdot 120 \cdot 10^6}}$$

$$t = 0{,}4304\,10^{-2}\,\mathrm{m} = 4{,}304\,\mathrm{mm}.$$

Visina i širina profila iznose:

$$h = 24\,t = 103{,}3\,\mathrm{mm}, \qquad b = 51{,}65\,\mathrm{mm}.$$

Površina poprečnog presjeka iznosi

$$A_c = (22 + 24)\,t^2 = 46\,t^2 = 852{,}12\,\mathrm{mm}^2.$$

Uzmemo li kao osnovu za usporedbu A_c, bit će

$$\frac{A_b}{A_c} = \frac{2059}{852} = 2{,}42$$

$$\frac{A_a}{A_c} = \frac{3318}{852} = 3{,}68.$$

Prema tome, u slučaju pravokutnog presjeka potrebno je utrošiti 2,42 puta više materijala, a u slučaju kružnog presjeka 3,68 puta više materijala nego u slučaju presjeka u obliku zadanog I-profila. Odavde se vidi velika važnost racionalnog oblikovanja poprečnog presjeka.

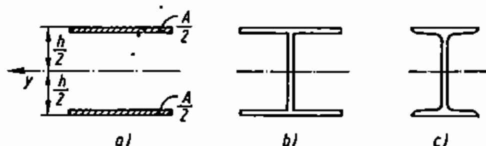
9.7. Idealni moment otpora, iskorištenost presjeka

Od više poprečnih presjeka jednake površine A, a različitog oblika, veći moment otpora i veći moment tromosti imat će oni presjeci u kojih je veći dio površine poprečnog presjeka što više udaljen od neutralne osi, tj. od težišta presjeka. Visina grede, odnosno nosača obično je ograničena. Za zadanu visinu h i površinu A poprečnog presjeka dobili bismo najveći moment tromosti i otpora ako bi površina bila raspodijeljena u obliku dviju uskih tankih traka (pojasova), kako je prikazano na slici 9.22a. Idealni moment tromosti presjeka, prema slici 9.22a, iznosi

$$I_{yid} = 2\frac{A}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{A\,h^2}{4},$$

dok je idealni moment otpora istog presjeka

$$W_{id} = \frac{I_y}{h/2} = \frac{1}{2} A\,h = 0{,}5\,A\,h.$$



Slika 9.22. Racionalni oblici presjeka štapa pri savijanju

U stvarnosti pojasovi moraju imati određenu debljinu i moraju biti spojeni rebrom. Tako dolazimo do I-profila. Za valjane I-profile jest

$$W_y = (0{,}31 + 0{,}35)\,A\,h.$$

Omjer momenta otpora nekog presjeka i momenta otpora idealnog presjeka iste visine naziva se iskorištenost presjeka i označava se sa η, tj.

$$\eta = \frac{W_y}{W_{id}} < 1.$$

Vrijednosti η za neke važnije oblike presjeka navedene su u tablici 9.1.

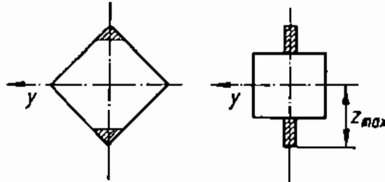
Tablica 9.1

Vrijednosti η za neke presjeke

Presjek	Iskorištenost presjeka η
Kružni	0,25
Pravokutni	0,33
I-profil	0,61 – 0,65
U-profil	0,59 – 0,61
Z-profil	0,57 – 0,60

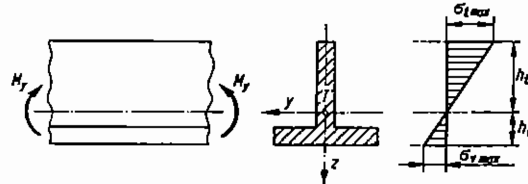
Što je rebro tanje i više, bit će u njemu veća posmična naprezanja. Ako je rebro vrlo tanko, posmična naprezanja mogu postati veća od normalnih i presudna pri proračunu čvrstoće. Osim toga, tlačna naprezanja koja djeluju pod kutom od 45° prema osi štapa mogu dovesti do gužvanja ili izvijanja (gubitka elastične stabilnosti) rebra. Zbog svega toga visina rebra mora biti ograničena, a debljina mora biti veća od neke minimalne vrijednosti.

Napomenimo na kraju da postoje oblici presjeka u kojim smanjenjem površine možemo povećati moment otpora. Dva takva presjeka prikazana su na slici 9.23. Odsijecanjem iscrtanih dijelova poprečnog presjeka smanjuje se u većoj mjeri z_{max} od



Slika 9.23. Odsijecanjem iscrtanih dijelova povećavamo moment otpora

I_y, što dovodi do povećanja W_y. Sve što smo rekli o racionalnim presjecima odnosi se na nosače koji su izrađeni od materijala koji imaju jednaku vlačnu i tlačnu čvrstoću. Krhki materijali mogu imati tlačnu čvrstoću nekoliko puta veću od vlačne, pa treba nastojati da maksimalno vlačno naprezanje bude manje od maksimalnog tlačnog naprezanja. Zbog toga se presjeci nosača od krhkih materijala rade nesimetrično prema neutralnoj osi, kako je prikazano na slici 9.24.



Slika 9.24. Racionalan presjek nosača od krhkog materijala koji ima veću tlačnu čvrstoću od vlačne čvrstoće

Ako sa h_v i h_t označimo udaljenost od neutralne osi krajnjeg vlakna na vlačnoj, odnosno na tlačnoj strani, uvjet čvrstoće glasi

$$\sigma_{v\,max} = \frac{M_y}{I_y} h_v < \sigma_{v\,dop}$$
$$\sigma_{t\,max} = \frac{M_y}{I_y} h_t < \sigma_{t\,dop}, \tag{9.14}$$

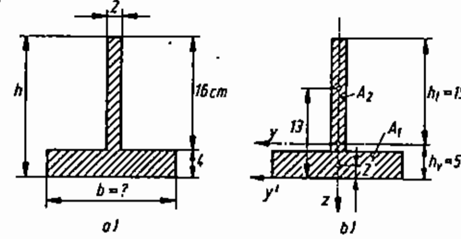
gdje su $\sigma_{v\,max}$ i $\sigma_{t\,max}$ maksimalno vlačno i maksimalno tlačno naprezanje, a $\sigma_{v\,dop}$ i $\sigma_{t\,dop}$ dopušteno vlačno i dopušteno tlačno naprezanje. Podijelimo li prvu jednadžbu izraza (9.14) s drugom jednadžbom istog izraza, dobit ćemo

$$\frac{h_v}{h_t} = \frac{\sigma_{v\,dop}}{\sigma_{t\,dop}}. \tag{9.15}$$

Izraz (9.15) predstavlja uvjet racionalnog konstruiranja nosača od krhkog materijala.

PRIMJER 9.7

Nosač od sivog lijeva ima presjek prema slici 9.25. Odrediti širinu presjeka b, ako je $\sigma_{t\,dop} = 3\sigma_{v\,dop}$.



Slika 9.25

Prema (9.15) treba biti

$$h_v : h_t = \sigma_{t\,dop} : \sigma_{v\,dop} = 1:3.$$

Također je

$$h_v + h_t = h = 20\,\text{cm}.$$

Odavde lako možemo dobiti $h_v = 5$ cm i $h_t = 15$ cm. Širinu pojasa b odredit ćemo iz uvjeta da se neutralna linija, tj. težište T nalazi na udaljenosti $h_v = 5$ cm od donjeg ruba:

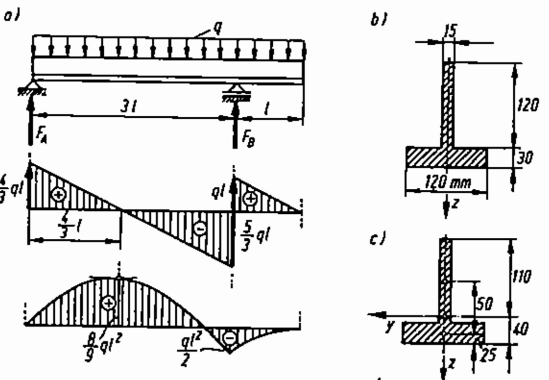
$$h_v = \frac{A_1\,2 + A_2\,12}{A_1 + A_2}$$

$$5 = \frac{4b\,2 + 32\cdot 12}{4b + 32}.$$

Odavde lako možemo dobiti da je $b = 18{,}67$ cm.

PRIMJER 9.8

Odrediti dopušteno opterećenje grede s prepustom koja je zadana i opterećena prema slici 9.26a. Poprečni presjek grede zadan je na slici 9.26b. Zadano: $\sigma_{r\,dop} = 20$ MPa, $l = 1$ m, $\sigma_{t\,dop} = 65$ MPa.



Slika 9.26

Položaj težišta možemo lako odrediti, a prikazan je na slici 9.26c. Moment tromosti I_y dan je izrazom

$$I_y = \frac{12 \cdot 3^3}{12} + 36 \cdot 2{,}5^2 + \frac{1{,}5 \cdot 12^3}{12} + 18 \cdot 5^2 = 918\,\text{cm}^4.$$

Reakcije u osloncima određujemo iz uvjeta ravnoteže:

$$F_A = \frac{4}{3} ql = \frac{4}{3} q$$

$$F_B = \frac{8}{3} ql = \frac{8}{3} q.$$

Dijagrami momenata savijanja i poprečnih sila prikazani su na slici 9.26a. Vidimo da postoje dva opasna presjeka: $x = 4l/3 = 1{,}33$ m, u kome je

$$M_{max} = \frac{8}{9} ql^2 = \frac{8}{9} q$$

i $x = 3$ m, u kome je

$$M_B = \frac{1}{2} ql^2 = \frac{1}{2} q,$$

pa je potrebno kontrolirati oba presjeka.

Presjek $x = 1{,}33$ m

$$\sigma_{max} = \frac{M_y}{I_y} h_y = \frac{8 \cdot q/9}{918 \cdot 10^{-8}} 4 \cdot 10^{-2} \leqslant \sigma_{r\,dop} = 20 \cdot 10^6 \quad \text{(a)}$$

$$\sigma_{min} = \frac{M_y}{I_y} h_t = \frac{8 \cdot q/9}{918 \cdot 10^{-8}} 11 \cdot 10^{-2} \leqslant \sigma_{t\,dop} = 65 \cdot 10^6 \quad \text{(b)}$$

Presjek $x = 4$ m

$$\sigma_{max} = \frac{M_y}{I_y} h_v = \frac{q/2}{918 \cdot 10^{-8}} 11 \cdot 10^{-2} \leqslant \sigma_{r\,dop} = 20 \cdot 10^6 \quad \text{(c)}$$

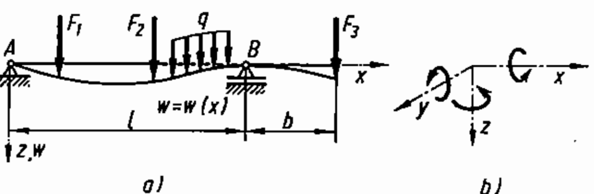
Iz izraza (a) dobivamo

$$q_{dop} = \frac{20 \cdot 918 \cdot 9}{8 \cdot 4} = 5163\,\text{N/m}.$$

Izraz (b) daje nam $q_{dop} = 6102$ N/m i napokon izraz (c) $q_{dop} = 3338$ N/m. Usvajamo najmanju vrijednost, pa je $q_{dop} = 3{,}338$ kN/m.

9.8. Diferencijalna jednadžba elastične linije

Razmatrat ćemo deformiranje štapova opterećenih na savijanje u ravnini Oxz, kako je prikazano na slici 9.27a. Pod opterećenjem uzdužna os štapa postaje zakrivljena i naziva se *elastična linija*. Pomaci točaka na osi štapa u smjeru osi x i y, tj. pomaci u i v zanemarivo su maleni u odnosu na pomake w u smjeru osi z. Pomaci w nazivaju se još i progibi grede, a elastična se linija ponekad naziva *progibna linija*.



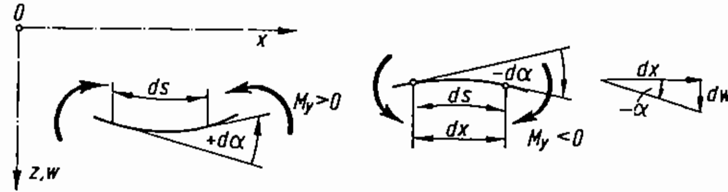
Slika 9.27. Definicija koordinatnog sustava i predznaka pomaka

Pri analizi progiba služit ćemo se desnim koordinatnim sustavom, prema slici 9.27b. Pozitivni smisao kuta definiran je po pravilu desnog vijka. Za koordinatni sustav Ozx pozitivan smjer kuta α suprotan je od gibanja kazaljke na satu. Prema izrazu (9.7) imamo

$$\varkappa = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho} = \frac{M_y}{EI_y}.$$

Pozitivni moment savijanja izaživa pozitivnu zakrivljenost, kako je naznačeno na slici 9.28. Iz matematike znamo da zakrivljenost krivulje $w=w(x)$ možemo izraziti pomoću prve i druge derivacije, tj.

$$\frac{1}{\rho}=\varkappa=\pm\frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}. \tag{9.15}$$



Slika 9.28. Predznak progiba, nagiba i zakrivljenosti

Predznak + ili − uzima se prema izboru koordinatnog sustava. Mi ćemo se ovdje ograničiti samo na male progibe i nagibe. U tom je slučaju dw/dx vrlo maleno u odnosu na jedinicu, pa možemo $(dw/dx)^2$ u izrazu (9.15) zanemariti, tj.

$$\varkappa\approx\pm\frac{d^2w}{dx^2}.$$

Kako je

$$-\alpha\approx\mathrm{tg}(-\alpha)=\frac{dw}{dx},$$

bit će

$$\alpha=-\frac{dw}{dx}. \tag{9.16}$$

Pri malim nagibima jest $ds=dx$, pa možemo pisati

$$\varkappa=\frac{d\alpha}{ds}=\frac{d\alpha}{dx}=\frac{d}{dx}\left(-\frac{dw}{dx}\right)$$

odnosno

$$\varkappa=-\frac{d^2w}{dx^2}. \tag{9.17}$$

Usporedbom izraza (9.7) i (9.17) dobit ćemo

$$\frac{d^2w}{dx^2}=-\frac{M_y}{EI_y}. \tag{9.18}$$

Izraz (9.18) predstavlja diferencijalnu jednadžbu elastične linije. Integriranjem te jednadžbe možemo dobiti progib i nagib u bilo kojoj točki grede. U petom poglavlju izveli smo izraze koji povezuju moment savijanja, poprečnu silu i opterećenje q. Pomoću tih izraza i izraza (9.18) možemo dobiti diferencijalnu jednadžbu

elastične linije četvrtog reda koja može biti pogodnija za određivanje progiba, posebno kod statički neodređenih zadataka.

Izraz (9.18) možemo napisati u obliku

$$EI_y\frac{d^2w}{dx^2}=-M_y.$$

Nakon deriviranja po x dobit ćemo

$$\frac{d}{dx}\left(EI_y\frac{d^2w}{dx^2}\right)=-\frac{dM_y}{dx}=-Q_z, \tag{9.19}$$

odnosno nakon još jednog deriviranja imamo

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI_y\frac{d^2w}{dx^2}\right)=-\frac{d^2M_y}{dx^2}=-\frac{dQ_z}{dx}=q_z. \tag{9.19a}$$

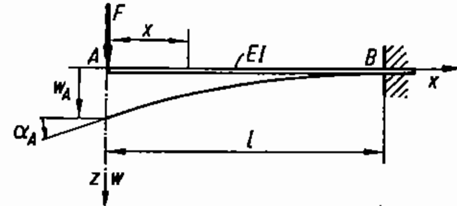
Izrazi (9.16), (9.18), (9.19) i (9.19a) uz $EI_y=$konst. prelaze u

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dx}&=-\alpha & \alpha&=-\frac{dw}{dx}\\ \frac{d^2w}{dx^2}&=-\frac{M_y}{EI_y} & M_y&=-EI_y\frac{d^2w}{dx^2}\\ \frac{d^3w}{dx^3}&=-\frac{Q_z}{EI_y} & Q_z&=-EI_y\frac{d^3w}{dx^3}\\ \frac{d^4w}{dx^4}&=\frac{q_z}{EI_y} & q_z&=EI_y\frac{d^4w}{dx^4}.\end{aligned} \tag{9.20}$$

Integriranjem četvrte jednadžbe tog izraza možemo odrediti progibe i nagibe direktno bez prethodnog izračunavanja reakcija i dijagrama momenata savijanja i poprečnih sila. Dovoljno je poznavati samo zakon opterećenja $q_z=f(x)$ i način učvršćenja štapa.

PRIMJER 9.9

Za konzolu zadanu i opterećenu prema slici 9.29 naći progib i nagib na slobodnom kraju. Zadano: F, l, EI.



Slika 9.29. Konzola opterećena silom na kraju

Prema izrazu (9.18) diferencijalna jednadžba elastične linije glasi

$$\frac{d^2w}{dx^2}=-\frac{M_y}{EI_y}. \tag{a}$$

Kako je $M_y=-Fx$, bit će

$$EI_y\frac{d^2w}{dx^2}=Fx. \tag{b}$$

Dvostrukim integriranjem izraza (a) dobit ćemo

$$EI_y\frac{dw}{dx}=F\frac{x^2}{2}+C_1 \tag{c}$$

$$EI_y w=F\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2. \tag{d}$$

Konstante integracije C_1 i C_2 odredit ćemo iz rubnih uvjeta

$$\frac{dw}{dx}(l)=0 \qquad w(l)=0.$$

Uvrstimo li prvi uvjet u izraz (c), dobit ćemo

$$0=F\frac{l^2}{2}+C_1,$$

odnosno

$$C_1=-F\frac{l^2}{2}. \tag{e}$$

Ako uvrstimo izraz (e) i drugi rubni uvjet u izraz (d), bit će

$$0=F\frac{l^3}{6}-\frac{Fl^3}{2}+C_2,$$

odnosno

$$C_2=\frac{Fl^3}{3}.$$

Izrazi za progib w i nagib $\alpha=-\frac{dw}{dx}$ glase:

$$w=\frac{1}{EI_y}\left[F\frac{x^3}{6}-\frac{Fl^2}{2}x+\frac{Fl^3}{3}\right]$$

$$w=\frac{Fl^3}{6EI_y}\left[\left(\frac{x}{l}\right)^3-3\left(\frac{x}{l}\right)+2\right] \tag{9.21}$$

$$\alpha=-\frac{dw}{dx}=\frac{Fl^2}{2EI_y}\left[1-\left(\frac{x}{l}\right)^2\right] \tag{9.22}$$

Lako se možemo uvjeriti da je za $x=l$, $w=0$ i $\alpha=0$. Progib i nagib na slobodnom kraju dobit ćemo ako u izraze (9.21) i (9.22) uvrstimo $x=0$, tj.

$$w_A=\frac{Fl^3}{3EI} \tag{9.23}$$

$$\alpha_A=\frac{Fl^2}{2EI}. \tag{9.24}$$

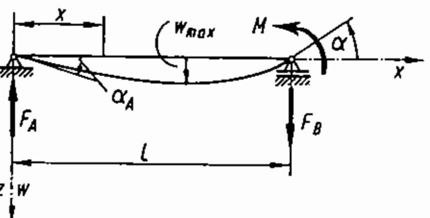
Ubuduće ćemo pisati EI umjesto EI_y jer se podrazumijeva da se moment tromosti odnosi na os y.

PRIMJER 9.10

Za gredu zadanu i opterećenu prema slici 9.30 naći:

- nagibe iznad oslonaca,
- mjesto i veličinu maksimalnog progiba.

Zadano: M, l, EI.



Slika 9.30. Greda na dva oslonca opterećena momentom na jednom osloncu

Iz uvjeta ravnoteže možemo dobiti

$$F_A=F_B=\frac{M}{l}.$$

Moment savijanja u presjeku x iznosi

$$M_y=F_Ax=M\frac{x}{l},$$

pa diferencijalna jednadžba elastične linije glasi

$$\frac{d^2w}{dx^2}=-\frac{M_y}{EI}=-\frac{M}{EI}\frac{x}{l}.$$

Nakon sređivanja i integriranja dobit ćemo

$$EI\frac{dw}{dx}=-\frac{M}{l}\frac{x^2}{2}+C_1,$$

$$EI\,w=-\frac{M\,x^3}{l\;6}+C_1\,x+C_2.$$

Iz uvjeta $w(0)=0$ možemo dobiti $C_2=0$, a zatim pomoću uvjeta $w(l)=0$:

$$-\frac{M\,l^3}{l\;6}+C_1 l=0,$$

odnosno

$$C_1=\frac{Ml}{6}.$$

Izraz za progib sada glasi

$$w=-\frac{Mx^3}{6l\,EI}+\frac{Mlx}{6\,EI}$$

$$w=\frac{Ml^2}{6\,EI}\left[\left(\frac{x}{l}\right)-\left(\frac{x}{l}\right)^3\right]. \tag{9.25}$$

Nagib α dobit ćemo deriviranjem izraza za w, tj.

$$\alpha=-\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=\frac{Ml}{6\,EI}\left[3\left(\frac{x}{l}\right)^2-1\right]. \tag{9.26}$$

Nagibi iznad oslonaca iznose:

$$\alpha_A=\alpha(0)=-\frac{Ml}{6\,EI} \tag{9.27}$$

$$\alpha_B=\alpha(l)=\frac{Ml}{3\,EI}. \tag{9.28}$$

Progib je maksimalan na mjestu gdje je $\alpha=0$, tj.

$$x=\frac{l}{\sqrt{3}}=0{,}5774\,l$$

i iznosi

$$w_{max}=\frac{Ml^2}{9\sqrt{3}\,EI}=0{,}06415\frac{Ml^2}{EI}. \tag{9.29}$$

PRIMJER 9.11

Za gredu zadanu i opterećenu prema slici 9.31 naći jednadžbu elastične linije, progib u sredini w_c te nagibe α_A i α_B. Zadano: q, l, E.

Iz uvjeta simetrije i uvjeta ravnoteže $\Sigma F_y=0$ možemo dobiti

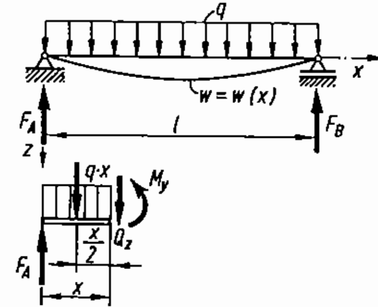
$$F_A=F_B=\frac{1}{2}ql.$$

Moment savijanja u presjeku x iznosi

$$M_y=F_A x-qx\frac{x}{2}=\frac{1}{2}qlx-\frac{1}{2}qx^2,$$

pa diferencijalna jednadžba elastične linije glasi

$$EI\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}=-M_y=\frac{1}{2}qx^2-\frac{1}{2}qlx.$$



Slika 9.31. Greda na dva oslonca opterećena jednoliko kontinuirano

Nakon dvostrukog integriranja dobivamo

$$EI\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{6}qx^3-\frac{1}{4}qlx^2+C_1$$

$$EI\,w=\frac{1}{24}qx^4-\frac{1}{12}qlx^3+C_1x+C_2.$$

Iz uvjeta $w(0)=0$ dobit ćemo $C_2=0$, a zatim iz uvjeta $w(l)=0$, $C_1=ql^3/24$, tako da izraz za w glasi

$$w=\frac{ql^4}{24\,EI}\left[\left(\frac{x}{l}\right)^4-2\left(\frac{x}{l}\right)^3+\left(\frac{x}{l}\right)\right]. \tag{9.30}$$

Maksimalni progib nastaje na mjestu $x=l/2$ i iznosi

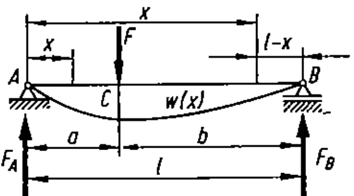
$$w_{max}=\frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI}. \tag{9.31}$$

PRIMJER 9.12

Za gredu zadanu i opterećenu prema slici 9.32 naći izraz za elastičnu liniju i maksimalni progib.

Iz uvjeta ravnoteže možemo lako odrediti reakcije F_A i F_B:

$$F_A = F\frac{b}{l}, \qquad F_B = F\frac{a}{l}.$$



Slika 9.32. Greda na dva oslonca opterećena koncentriranom silom

U tom slučaju ne možemo dobiti jedinstven izraz za moment savijanja. Analitički izraz za moment savijanja ima jedan oblik lijevo od sile F, a drugi oblik desno od sile F, tj.

$$\text{za } 0<x<a \qquad M_y = F_A x = F\frac{b}{l}x$$

$$\text{za } a<x<l \qquad M_y = F_B(l-x) = Fa - F\frac{a}{l}x.$$

Prema tome će i diferencijalna jednadžba elastične linije imati različit oblik za dio AC i dio CB. U donja dva stupca navedene su diferencijalne jednadžbe i postupak njihova integriranja.

Dio AC	Dio CB	
$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M_y}{EI} = -\frac{Fb}{EI\,l}x$	$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M_y}{EI} = -\frac{Fa}{EI} + \frac{Fa}{EI\,l}x$	
$\frac{dw}{dx} = -\frac{Fb}{EI\,l}\frac{x^2}{2} + C_1$	$\frac{dw}{dx} = -\frac{Fa}{EI}x + \frac{Fa}{EI\,l}\frac{x^2}{2} + C_3$	(9.32)
$w = -\frac{Fb}{EI\,l}\frac{x^3}{6} + C_1x + C_2$	$w = -\frac{Fa}{EI}\frac{x^2}{2} + \frac{Fa}{EI\,l}\frac{x^3}{6} + C_3x + C_4$	

Konstante integracije odredit ćemo iz dva rubna uvjeta i dva uvjeta neprekinutosti elastične linije. Rubni su uvjeti:

za dio AC $w(0)=0$, što daje $C_2=0$

za dio CB $w(l)=0$, što daje

$$-\frac{Fal^2}{2EI} + \frac{Fal^2}{6EI} + C_3l + C_4 = 0. \tag{a}$$

Uvjeti kontinuiranosti elastične linije zahtijevaju da su progib i nagib dijela AC i CB u točki C jednaki, tj.

$$w_c = -\frac{Fb}{EI\,l}\frac{a^3}{6} + C_1a = -\frac{Fa^3}{2EI} + \frac{Fa^4}{6EI\,l} + C_3a + C_4 \tag{b}$$

$$\alpha_c = -\frac{Fb}{EI\,l}\frac{a^2}{2} + C_1 = -\frac{Fa^2}{EI} + \frac{Fa^3}{2EI\,l} + C_3. \tag{c}$$

Nakon opširnog rješavanja jednadžbi (a, b i c) dobit ćemo

$$C_1 = \frac{Fb}{6EI\,l}(l^2-b^2) \qquad C_2 = 0$$

$$C_3 = \frac{Fb}{6EI\,l}(2l^2+a^2) \qquad C_4 = -\frac{Fa^3}{6EI}.$$

Ako vrijednosti za konstante integracije uvrstimo u izraze za elastičnu liniju i zatim sredimo, dobit ćemo:

$$w = \frac{Fl^3}{6EI}\left\{\frac{bx}{l^2}\left[1-\left(\frac{b}{l}\right)^2-\left(\frac{x}{l}\right)^2\right]\right\} \qquad x \leqslant a \tag{9.33}$$

$$w = \frac{Fl^3}{6EI}\left\{\frac{bx}{l^2}\left[1-\left(\frac{b}{l}\right)^2-\left(\frac{x}{l}\right)^2\right]+\left[\frac{x-a}{l}\right]^3\right\} \qquad x \geqslant a. \tag{9.34}$$

Mjesto i veličinu maksimalnog momenta dobit ćemo ako derivaciju izraza (9.33) izjednačimo s nulom. Navest ćemo samo rezultat. Maksimalni progib nastaje na mjestu

$$x = \sqrt{\frac{l^2-b^2}{3}} \qquad a \geqslant \frac{l}{2} \tag{9.35}$$

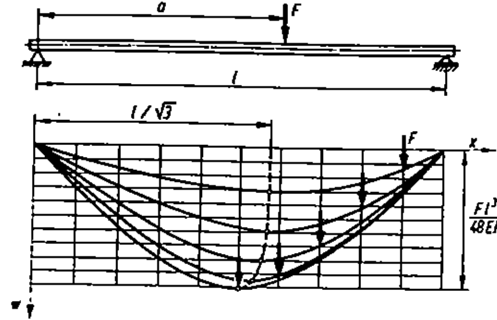
i iznosi

$$w_{max} = \frac{Fl^3}{3EI}\frac{b}{l}\sqrt{\left(\frac{l^2-b^2}{3l^2}\right)^3}. \tag{9.36}$$

Kad je $b=l/2$, tj. kad je greda opterećena u sredini, bit će

$$w_{max} = \frac{Fl^3}{48EI}. \tag{9.37}$$

Na slici 9.33 prikazane su elastične linije obične grede za pet različitih položaja sile F. Mjerilo za progibe mnogo je veće od mjerila za dužine. Iz slike vidimo da maksimalni progib nastaje blizu sredine grede bez obzira na položaj sile F.



Slika 9.33. Ovisnost oblika elastične linije o položaju sile F

9.9 Metoda analogne grede

Vidjeli smo u primjerima 9.9, 9.10 i 9.11 da je određivanje progiba i nagiba, odnosno jednadžbe elastične linije direktnom integracijom diferencijalne jadnadžbe relativno jednostavno ako je moguće napisati jedinstveni analitički izraz za moment savijanja za cijelu duljinu grede. Međutim, ako je izraz za moment savijanja različit u raznim dijelovima grede, kao u primjeru 9.12, potrebno je uložiti mnogo truda u algebarske operacije uključujući i rješavanje sistema linearnih jednadžbi. U primjeni često susrećemo grede s više koncentriranih sila, pa je metoda direktnog rješavanja diferencijalne jednadžbe vrlo zamorna. U tim slučajevima pogodnije su druge metode, npr. metoda početnih parametara, metoda momentnih površina, metoda analogne grede itd. Metoda početnih parametara vrlo je pogodna. za rad na računskim strojevima. Mi ćemo ovdje opisati metodu analogne grede koja omogućava da lako i brzo odredimo progib ili nagib u samo jednoj točki. Pomoću te metode možemo dobiti i jednadžbu elastične linije, ali u tom slučaju ta metoda nema velike prednosti pred metodom direktnog integriranja. Određivanje progiba i nagiba grede promjenljivog presjeka tom metodom jednostavno je i zahtijeva neznatno više algebarskog. odnosno numeričkog rada nego u slučaju grede konstantnog presjeka.

Metoda analogne grede zasniva se na analogiji diferencijalnih jednadžbi koje povezuju q_z, Q_z i M_y (koje smo izveli u šestom poglavlju) i diferencijalnih jednadžbi koje povezuju progib w, nagib α i M_y/EI_y. Te su jednadžbe navedene paralelno u dva stupca:

$$\frac{d^2M_y}{dx^2}=-q_z \qquad \frac{d^2w}{dx^2}=-\frac{M_y}{EI_y}$$

$$\frac{dM_y}{dx}=Q_z \qquad \frac{dw}{dx}=-\alpha \qquad (9.38)$$

$$\frac{dQ_z}{dx}=-q_z \qquad \frac{1}{\rho}=\frac{d\alpha}{dx}=\frac{M_y}{EI_y}.$$

Usporedimo li izraze lijevog i desnog stupca, vidjet ćemo da među njima postoji potpuna formalna analogija. Ako veličine M_y/EI_y, α i w iz desnog stupca zamijenimo s q_z, $-Q_z$ i M_y, dobit ćemo izraze iz lijevog stupca. Ako osiguramo i analogne rubne uvjete, bit će i rješenja analogna. Prema tome, ako stvarnu gredu zamijenimo analognom (konjugiranom, fiktivnom) gredom koja je opterećena fiktivnim opterećenjem M_y/EI_y, poprečna sila analogne grede Q odgovarat će negativnom kutu nagiba $-\alpha$, a moment savijanja analogne grede odgovarat će progibu stvarne grede.

Napomena:

U daljnjem tekstu ispuštat ćemo indekse y i z i pod oznakama q, Q, M, I, razumijevati q_z, Q_z, M_y, I_y. Sve veličine koje se odnose na analognu gredu označavat ćemo zvjezdicom. Tako je M^* moment savijanja analogne grede, Q^* poprečna sila analogne grede, $q^*=M_y/EI_y$ kontinuirano opterećenje analogne grede. Prema tome je

$$w \text{ analogno } M^*$$

$$\alpha \text{ analogno } -Q^* \qquad (9.39)$$

$$\frac{M_y}{EI_y} \text{ analogno } q^*.$$

Na slici 9.34 navedeni su razni slučajevi učvršćenja stvarne i analogne grede koji osiguravaju analogne rubne uvjete.

Ako je obična greda na nekom mjestu vezana zglobno, bit će na tom mjestu progib w jednak nuli, a nagib α u općem slučaju različit od nule. Prema tome analognu gredu na tom mjestu moramo tako vezati da bude $M^*=0$ i $Q^*\neq0$. To ćemo osigurati ako i analognu gredu vežemo zglobnim osloncem. Kad je rub stvarne grede slobodan, kao npr. slobodan kraj konzole, bit će $w\neq0$ i $\alpha\neq0$. Zbog toga moramo analognu gredu na tom mjestu tako vezati da bude $M^*\neq0$ i $Q^*\neq0$. To se postiže uklještenjem. Ako je pak kraj grede uklješten, bit će $w=0$ i $\alpha=0$. Odgovarajući rub analogne grede mora biti slobodan i u tom slučaju je $M^*=0$ i $Q^*=0$. Kad stvarna greda prelazi kontinuirano preko zglobnog oslonca, bit će $w=0$ i $\alpha\neq0$. U tom slučaju mora biti $M^*=0$ i $Q^*\neq0$, što će biti ispunjeno ako se na analognoj gredi nalazi Gerberov zglob. Isto tako Gerberovu zglobu stvarne grede odgovara prijelaz preko zglobnog oslonca analogne grede. Na donjem dijelu slike prikazano je nekoliko stvarnih greda s odgovarajućom analognom gredom.

Postupak rješavanja zadataka metodom analogne grede:

1. naći momentni dijagram stvarne grede;
2. ispod stvarne grede skicirati analognu gredu koja je opterećena kontinuiranim opterećenjem $q^*=M/EI$. Ako greda ima konstantnu fleksijsku krutost ($EI=$konst.), opterećenje q^* ima oblik M-dijagrama stvarne grede;
3. u traženim točkama naći M^* i Q^*;
4. prema analogiji je

$$w=M^* \quad \text{i} \quad \alpha=-Q^*.$$

U toku rješavanje zadataka metodom analogne grede stalno se pojavljuje nazivnik EI u izrazima za fiktivna opterećenja F^*, fiktivne momente savijanja M^* i fiktivne poprečne sile Q^*. Da bi se smanjilo pisanje, obično se EI u nazivniku ispušta u toku rješavanja zadatka, a dijeljenje se obavlja na kraju. U tom je slučaju

$$w=\frac{M^*}{EI} \quad \text{i} \quad \alpha=\frac{Q^*}{EI}. \tag{9.40}$$

STVARNA GREDA	ANALOGNA GREDA
A; $w=0$, $\alpha\neq0$	A*; $M^*=0$, $Q^*\neq0$
A; $w\neq0$, $\alpha\neq0$	A*; $M^*\neq0$, $Q^*\neq0$
A; $w=0$, $\alpha=0$	A*; $M^*=0$, $Q^*=0$
A; $w=0$, $\alpha\neq0$	A*; $M^*\neq0$, $Q^*\neq0$
A; $w\neq0$, $\alpha\neq0$; NAGIB TANGENTE RAZLIČIT LIJEVO I DESNO OD A	A*; $M^*\neq0$, $Q^*\neq0$; Q^* DIJAGRAM IMA SKOK U TOČKI A
A, B	A*, B*
A	A*
A, B, C	A*, B*, C*
A, B, C, D	A*, B*, C*, D*

Slika 9.34. Odgovarajući rubni uvjeti stvarne i analogne grede

Pri primjeni metode analogne grede potrebno je poznavati površinu i položaj težišta ispod pojedinih dijelova momentnog dijagrama. U tablici 9.2 prikazani su položaj težišta i površine nekih likova koji se najčešće pojavljuju pri rješavanju zadataka metodom analogne grede.

Kako se metoda analogne grede zasniva na diferencijalnoj jednadžbi (9.18), ona podliježe istim ograničenjima kao i sama diferencijalna jednadžba. Najvažnije ograničenje jest da se i (9.18) i ta metoda mogu primijeniti na nosače u kojih su

progibi maleni. Ako progibi nisu maleni, treba upotrijebiti izraz (9.15) za zakrivljenost, tj. diferencijalna jednadžba glasi

$$\frac{\dfrac{d^2w}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dw}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}=-\frac{M_y}{EI_y}. \tag{9.41}$$

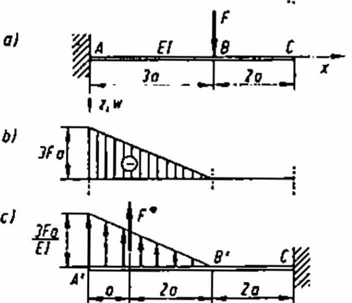
Tablica 9.2

Položaj težišta i površine nekih likova

Lik	Površina	Lik	Površina
h; T_1; $\frac{1}{3}b$, $\frac{2}{3}b$; b	$A=\frac{1}{2}bh$	T_1; h; $\frac{2}{3}b$, $\frac{1}{3}b$; b	$A=\frac{1}{2}bh$
parabola 2. redo; h; T_1; $\frac{1}{4}b$, $\frac{3}{4}b$; b	$A=\frac{1}{3}bh$	parabola 2. redo; T_1; h; $\frac{5}{8}b$, $\frac{3}{8}b$; b	$A=\frac{2}{3}bh$
parabola 3. redo; h; T_1; $\frac{1}{5}b$, $\frac{4}{5}b$; b	$A=\frac{1}{4}bh$	parabola 3. redo; T_1; h; $\frac{3}{5}b$, $\frac{2}{5}b$; b	$A=\frac{3}{4}bh$
parabola n. redo; h; T_1; $\frac{b}{n+2}$; $\frac{n+1}{n+2}b$; b	$A=\frac{1}{n+1}bh$	parabola n. redo; T_1; h; $\frac{n+3}{2n+4}b$, $\frac{n+1}{2n+4}b$; b	$A=\frac{n}{n+1}bh$

PRIMJER 9.13

Za konzolu zadanu i opterećenu prema slici 9.35 naći progib i nagib elastične linije u presjecima B i C. Zadano: F, a, EI.



Slika 9.35. Konzola opterećena silom F

Na slici 9.35b prikazan je momentni dijagram, a na slici 9.35c analogna greda opterećena fiktivnim opterećenjem koje je jednako $q^* = M/EI$. Fiktivno opterećenje usmjereno je prema gore, tj. suprotno od pozitivnog smjera osi z jer je momentni dijagram negativan. Rezultanta fiktivnog opterećenja F^* iznosi

$$F^* = \frac{1}{2}\frac{3Fa}{EI}3a = \frac{9}{2}\frac{Fa^2}{EI}.$$

Progib i nagib elastične linije jednaki su fiktivnom momentu savijanja M^* i negativnoj fiktivnoj poprečnoj sili $-Q^*$, tj.

$$\alpha_B = -Q_B^* = -F^* = -\frac{9}{2}\frac{Fa^2}{EI}$$

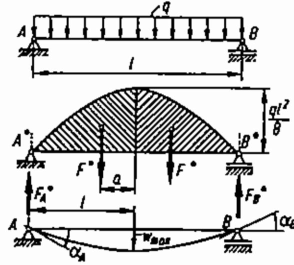
$$w_B = M_B^* = F^* 2a = \frac{9Fa^3}{EI}$$

$$\alpha_C = -Q_C^* = -F^* = -\frac{9Fa^2}{2EI}$$

$$w_C = M_C^* = F^* 4a = \frac{18Fa^3}{EI}.$$

PRIMJER 9.14

Za gredu opterećenu jednoliko kontinuirano, prema slici 9.36, naći progib u sredini i kut zakreta iznad oslonaca. Zadano: q, l, EI.



Slika 9.36. Progib grede opterećene jednoliko kontuirano

U tom slučaju dijagram momenata savijanja ima oblik parabole 2. reda. Maksimalni moment savijanja javlja se u sredini i iznosi $ql^2/8$. Analogna greda ima također oblik obične grede. Ukupno fiktivno opterećenje zamijenit ćemo s dvije jednake sile F^*. Pri izračunavanju fiktivnih sila nećemo dijeliti momentni dijagram s krutošću EI na početku. To ćemo učiniti na kraju, prema izrazu (9.40). Fiktivna sila F^* prikazana je na slici i, prema tablici 9.2, iznosi

$$F^* = \frac{2}{3}\frac{l}{2}\frac{ql^2}{8} = \frac{ql^3}{24}.$$

Udaljenost fiktivne sile F^* od sredine odredit ćemo također pomoću tablice 9.2, tj.

$$a = \frac{3}{8}\frac{l}{2} = \frac{3}{16}l.$$

Zbog simetrije možemo pisati

$$F_A^* = F_B^* = F^* = \frac{ql^3}{24}.$$

Fiktivne poprečne sile u osloncima iznose:

$$Q_A^* = F_A^* = \frac{ql^3}{24}$$

$$Q_A^* = -F_B^* = -\frac{ql^3}{24}.$$

Odavde možemo dobiti kutove nagiba pomoću izraza (9.40):

$$\alpha_A = -\frac{Q_A^*}{EI} = -\frac{ql^3}{24EI}$$

$$\alpha_B = -\frac{Q_B^*}{EI} = \frac{ql^3}{24EI}.$$

Fiktivni moment savijanja u sredini grede iznosi

$$M_{max}^* = F_A^*\frac{l}{2} - F^*a = \frac{ql^3}{24}\frac{1}{2}l - \frac{ql^3}{24}\frac{3}{16}l = \frac{5}{384}ql^4,$$

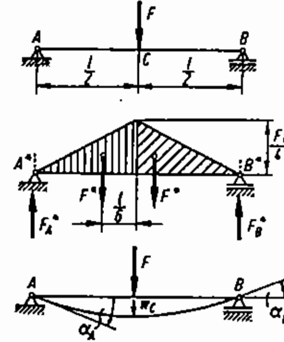
pa je progib u sredini grede

$$w_{max} = \frac{M_{max}^*}{EI} = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI}.$$

Dobili smo isti rezultat kao i u primjeru 9.11.

PRIMJER 9.15

Za gredu zadanu i opterećenu prema slici 9.37 naći progib u sredini grede i zakret tangente na krajevima grede. Zadano: F, l, EI.



Slika 9.37. Greda na dva oslonca opterećena silom u sredini

U tom je slučaju

$$F^* = \frac{1}{2}\frac{l}{2}\frac{Fl}{4} = \frac{Fl^2}{16}$$

$$F_A^* = F^* = \frac{Fl^2}{16}.$$

Fiktivni moment savijanja u sredini grede iznosi

$$M_C^* = F_A^* \frac{l}{2} - F^* \frac{l}{6}$$

$$M_C^* = \frac{Fl^2}{16}\frac{l}{2} - \frac{Fl^2}{16}\frac{l}{6} = \frac{Fl^3}{48}.$$

Odavde je

$$w_C = w_{\max} = \frac{M_C^*}{EI} = \frac{Fl^3}{48\,EI}.$$

Kako je $Q_A^* = F^*$ i $Q_B^* = -F^*$, bit će

$$\alpha_A = -\frac{Q_A^*}{EI} = -\frac{F^*}{EI} = -\frac{Fl^2}{16\,EI}$$

$$\alpha_B = -\frac{Q_B^*}{EI} = -\frac{(-F_B^*)}{EI} = \frac{Fl^2}{16\,EI}.$$

Kut α_A je negativan, što znači da se tangenta na elastičnu liniju u točki A zakrenula u smjeru kazaljke na satu. Kut α_B je pozitivan, što znači da se tangenta u točki B zakrenula suprotno od smjera kazaljke na satu.

PRIMJER 9.16

Za gredu s prepustom opterećenu prema slici 9.38a treba naći progib i nagib u točkama C i D. Zadano: M, a, EI.

Analogna greda s fiktivnim opterećenjem u obliku momentnog dijagrama prikazana je na slici 9.38b. Da bismo našli fiktivne reakcije F_A^*, F_B^* i F_D^*, zamijenit ćemo ukupno fiktivno opterećenje s dvije sile: F_1^* i F_2^*, koje iznose:

$$F_1^* = \frac{M\,6a}{2} = 3Ma$$

$$F_2^* = M\,2a = 2Ma.$$

Analogna greda oslobođena veza prikazana je na slici 9.38c. Iz uvjeta ravnoteže dijela AB možemo dobiti:

$$F_A^* = \frac{1}{3}F_1^* = Ma$$

$$F_B^* = \frac{2}{3}F_1^* = 2Ma.$$

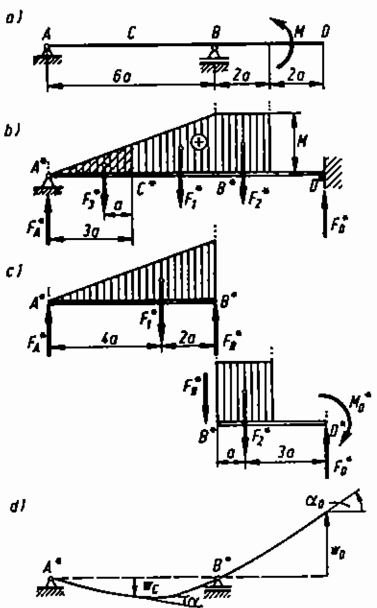
Uvjeti ravnoteže dijela BD dat će nam:

$$F_D^* = F_B^* + F_2^* = 4Ma$$

$$M_D^* = -F_B^*\,4a - F_2^*\,3a = -14Ma^2.$$

Fiktivna poprečna sila u D iznosi

$$Q_D^* = -F_D^* = -4Ma.$$



Slika 9.38. Greda s prepustom

Da bismo mogli naći fiktivni moment savijanja u točki C, zamijenit ćemo fiktivno opterećenje lijevo od C silom F_3^* koja iznosi

$$F_3^* = \frac{1}{2}\frac{M}{2}3a = \frac{3}{4}Ma.$$

Fiktivne sile i moment savijanja u točki C jesu

$$Q_C^* = F_A^* - F_3^* = \frac{1}{4}Ma$$

$$M_C^* = F_A^*\,3a - F_C^*\,a = \frac{9}{4}Ma^2.$$

Sada možemo pomoću izraza (9.40) odrediti progib i nagib u točkama C i D:

$$\alpha_C = -\frac{Q_C^*}{EI} = -\frac{Ma}{4EI}$$

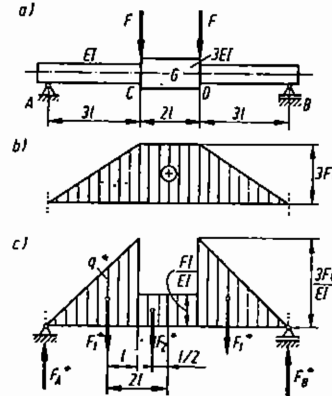
$$w_C = \frac{M_C^*}{EI} = \frac{9}{4}\frac{Ma^2}{EI}$$

$$\alpha_D = -\frac{Q_D^*}{EI} = \frac{4Ma}{EI}$$

$$w_D = \frac{M_D^*}{EI} = -14\frac{Ma^2}{EI}.$$

PRIMJER 9.17

Za gredu promjenljivog presjeka zadanu i opterećenu prema slici 9.39a naći progib u točkama C i D te zakret tangente u A i C. Zadano: F, l, EI.



Slika 9.39. Progib grede promjenljiva presjeka

Na slici 9.39b prikazan je momentni dijagram, a na slici 9.39c analogna greda s fiktivnim opterećenjem q^*. Kako je $q^* = M/EI$ a krutost EI u sredini tri put veća, dijagram q^* u srednjem je dijelu tri puta smanjen. Fiktivne sile ucrtane na slici 9.39c iznose:

$$F_1^* = \frac{1}{2}\frac{3Fl}{EI}3l = \frac{9}{2}\frac{Fl^2}{EI}$$

$$F_2^* = \frac{Fl}{EI}l = \frac{Fl^2}{EI}.$$

Pomoću uvjeta ravnoteže analogne grede možemo odrediti fiktivne reakcije

$$F_A^* = F_B^* = F_1^* + F_2^* = \frac{11}{2}\frac{Fl^2}{EI}.$$

Fiktivne poprečne sile jesu:

$$Q_A^* = F_A^* = \frac{11}{2}\frac{Fl^2}{EI}$$

$$Q_C^* = F_A^* - F_1^* = \frac{Fl^2}{EI},$$

dok fiktivni momenti savijanja iznose:

$$M_C^* = F_A^* 3 - F_1^* = 12\frac{Fl^3}{EI}$$

$$M_G^* = F_A^* 4 - F_1^* 2 - F_2^* = \frac{25}{2}\frac{Fl^3}{EI}.$$

Prema izrazu (9.40) možemo pisati:

$$\alpha_A = -Q_A^* = -\frac{11}{2}\frac{Fl^2}{EI}$$

$$\alpha_C = -Q_C^* = -\frac{Fl^2}{EI}$$

$$w_C = M_C^* = 12\frac{Fl^3}{EI}$$

$$w_G = M_G^* = \frac{25}{2}\frac{Fl^3}{EI}.$$

U tablici 9.3 navedeni su pomaci i kutovi zakreta tangente na elastičnu liniju za neke grede. Ti podaci mogu nam korisno poslužiti pri rješavanju složenijih problema, posebno pri određivanju pomaka okvirnih nosača, kako je ilustrirano u primjeru 9.18.

Tablica 9.3

Pomaci i kutovi zakreta tangente

A, EI, B, M, l	$\alpha_B = \frac{Ml}{EI}$ $w_B = \frac{Ml^2}{2EI}$	M, A, EI, B, l	$\alpha_B = \frac{Ml}{6EI}$ $\alpha_A = \frac{Ml}{3EI}$
A, EI, F, B, l	$\alpha_B = \frac{Fl^2}{2EI}$ $w_B = \frac{Fl^3}{3EI}$	F, A, C, EI, B, l/2, l/2	$\alpha_A = \alpha_B = \frac{Fl^2}{16EI}$ $w_C = \frac{Fl^3}{48EI}$
q, EI, A, B, l	$\alpha_B = \frac{ql^3}{6EI}$ $w_B = \frac{ql^4}{8EI}$	EI, q, A, B, l/2, l/2	$\alpha_A = \alpha_B = \frac{ql^3}{24EI}$ $w_C = \frac{5ql^4}{384EI}$

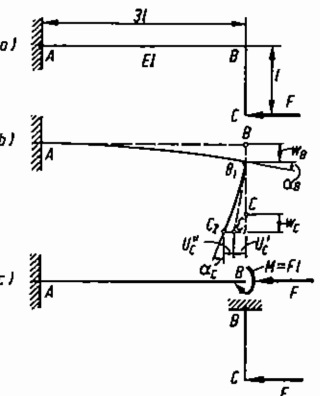
U tablici su navedene apsolutne vrijednosti.

PRIMJER 9.18

Za okvirni nosač zadan i opterećen prema slici 9.40a. odrediti komponente pomaka točke C: u_C, w_C i α_C. Zadano: F, l, EI.

Nosač možemo rastaviti na dva dijela: konzolu AB koja je na kraju B opterećena momentom $M=Fl$ i silom F, te konzolu BC koja je opterećena u C silom F, kako je prikazano na slici 9.40a. Uzet ćemo u obzir samo pomake koji nastaju zbog savijanja, jer su prema njima pomaci od aksijalnog opterećenja zanemarivo maleni. Prema tablici 9.2 pomaci kraja B iznose:

$$w_B=\frac{M\,(3l)^2}{2\,EI}=\frac{9Fl^3}{2\,EI},\quad \alpha_B=\frac{M3l}{EI}=\frac{3Fl^2}{EI},\quad u_B=0.$$



Slika 9.40. Okvirni nosač

Preko krute veze u B ti se pomaci prenose na dio BC. Ako ne bismo uzeli u obzir savijanje dijela BC, pomaci kraja C bili bi

$$\alpha_C'=\alpha_B,\quad w_C'=w_B,\quad u_C'=\alpha_B\,l=\frac{3Fl^3}{EI}.$$

Pomoću tablice 9.2 odredit ćemo pomake kraja C koji nastaje zbog savijanja konzole BC:

$$\alpha_C''=\frac{Fl^2}{2\,EI},\quad w_C''=0,\quad u_C''=\frac{Fl^3}{3\,EI}.$$

Ukupni pomaci kraja C u tom slučaju iznose:

$$u_C=u_C'+u_C''=\frac{3Fl^3}{EI}+\frac{Fl^3}{3\,EI}=\frac{10Fl^3}{3\,EI}$$

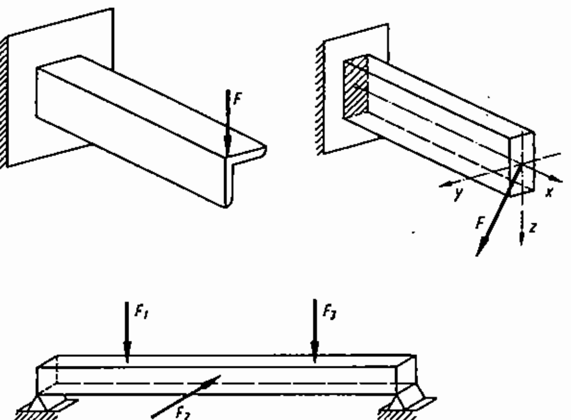
$$w_C=w_C'+w_C''=\frac{9Fl^3}{2\,EI}$$

$$\alpha_C=\alpha_C'+\alpha_C''=\frac{3Fl^2}{EI}+\frac{Fl^2}{2\,EI}=\frac{7Fl^2}{2\,EI}.$$

Deformirani oblik okvirnog nosača prikazan je na slici 9.40b punom crtom AB_1C_2. Crta AB_1C_1 prikazuje deformirani oblik nosača, pri čemu se ne uzima u obzir savijanje dijela BC. Tako bi se nosač deformirao ako bi nosač ABC bio opterećen momentom $M=Fl$ u točki B.

9.10. Koso savijanje

Kad moment savijanja ne djeluje ni oko jedne glavne osi tromosti presjeka štapa, riječ je o kosom savijanju. Na slici 9.41 prikazano je nekoliko greda koje su opterećene na koso savijanje. Koso savijanje zapravo predstavlja istovremeno savijanje u dvije međusobno okomite ravnine, pa problem analize naprezanja kod



Slika 9.41. Koso savijanje

kosog savijanja rješavamo tako da opterećenje rastavljamo u dvije ravnine: Oxy i Oxz, gdje se osi y i z podudaraju s glavnim osima tromosti presjeka štapa. Os x podudara se s uzdužnom osi štapa. Momente savijanja M_y i M_z u svakoj ravnini određujemo kao kod običnog savijanja. Naprezanja su tada dana izrazom

$$\sigma_x=\frac{M_y}{I_y}z-\frac{M_z}{I_z}y. \tag{9.42}$$

Prvi član na desnoj strani predstavlja naprezanje zbog savijanja u ravnini Oxz i odgovara izrazu (9.8). Drugi član odgovara naprezanju u ravnini Oxy. Ovdje se javlja negativan predznak jer je pozitivan moment savijanja M_z tako definiran da izaziva negativno (tlačno) naprezanje na dijelu presjeka gdje je y pozitivan. To je ilustrirano na slici 9.42c. Prema toj slici ukupan moment savijanja M čini kut α s osi y. Njegove komponente M_y i M_z jesu:

$$M_y=M\cos\alpha,\qquad M_z=M\sin\alpha, \tag{9.43}$$

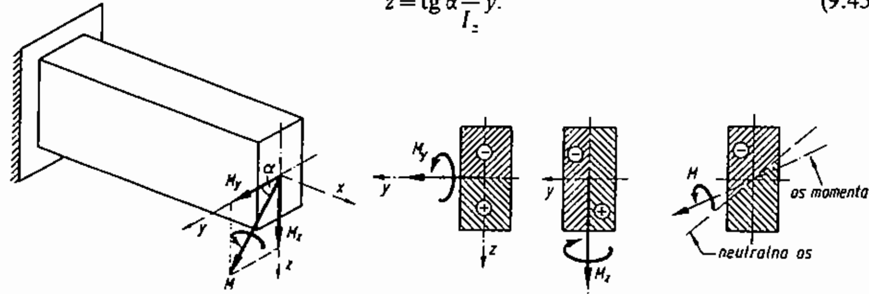
$$\sigma_x = M\left(\frac{z\cos\alpha}{I_y} - \frac{y\sin\alpha}{I_x}\right). \tag{9.44}$$

Pomoću izraza (9.44) lako možemo odrediti jednadžbu neutralne osi, tj. pravca na kojem je naprezanje σ_x jednako nuli. Izjednačenjem izraza (9.44) s nulom daje

$$\frac{z\cos\alpha}{I_y} - \frac{y\sin\alpha}{I_z} = 0$$

odnosno

$$z = \operatorname{tg}\alpha \frac{I_y}{I_z} y. \tag{9.45}$$



Slika 9.42. Kod kosog savijanja neutralna linija ne podudara se s osi oko koje djeluje moment savijanja

Taj se izraz može napisati u obliku

$$z = \operatorname{tg}\beta\, y, \tag{9.46}$$

gdje je β kut koji neutralna os čini s osi y. Očito je

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{I_y}{I_z}\operatorname{tg}\alpha. \tag{9.47}$$

Kad je $I_y > I_z$ (kao na slici 9.42), onda je i $\beta > \alpha$. Prema tome možemo zaključiti da se neutralna os ne podudara s osi oko koje djeluje moment savijanja. S jedne strane neutralne osi naprezanja su pozitivna a s druge negativna. Prostorna skica raspodjele naprezanja σ_x kod kosog savijanja prikazana je na slici 9.43.

Kako se kod kosog savijanja radi o istovremenom savijanju u dvije ravnine: Oxz i Oxy, ukupni pomak δ ima dvije komponente: v i w. Komponenta w u smjeru osi z posljedica je savijanja u ravnini Oxz. Isto tako komponenta v nastaje zbog savijanja u ravnini Oxy. Ukupni pomak δ određuje se vektorskim zbrojem v i w, tj.

$$\delta = \sqrt{v^2 + w^2} \tag{9.48}$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{w}{v},$$

gdje je γ kut koji ukupni pomak δ čini s osi y. Za konzolu na slici 9.42 komponente pomaka iznose

$$v = \frac{M_z l^2}{EI_z} = \frac{Ml^2}{EI_z}\sin\alpha$$

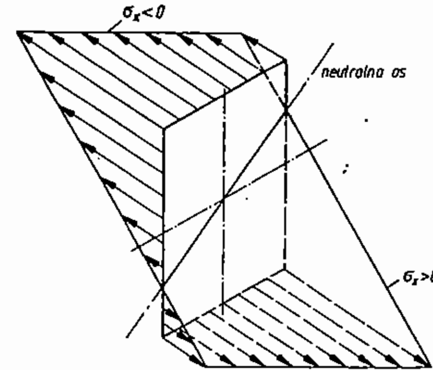
$$w = -\frac{M_y l^2}{EI_y} = -\frac{Ml^2}{EI_y}\cos\alpha,$$

pa je

$$\delta = \sqrt{v^2 + w^2} = \frac{Ml^2}{E}\sqrt{\left(\frac{\sin\alpha}{I_z}\right)^2 + \left(\frac{\cos\alpha}{I_y}\right)^2} \tag{9.49}$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{w}{v} = -\frac{I_z}{I_y}\operatorname{ctg}\alpha. \tag{9.50}$$

Budući da je $\operatorname{tg}\gamma = -1/\operatorname{tg}\beta$, ukupni pomak δ okomit je na neutralnu liniju.

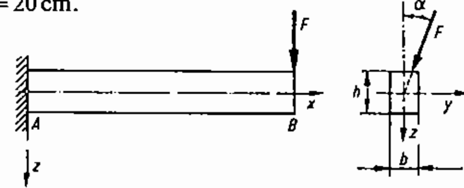


Slika 9.43. Prostorna skica raspodjele naprezanja σ_x kod kosog savijanja

Općenito vrijedi pravilo: Ako pri kosom savijanju sve vanjske sile i spregovi leže u jednoj ravnini, elastična linija jest ravninska krivulja. Međutim, ravnina elastične linije ne podudara se s ravninom opterećenja, nego je okomita na neutralnu površinu, tj. pomaci su okomiti na neutralnu os. Ako vanjsko opterećenje ne leži u jednoj ravnini, elastična linija jest prostorna krivulja.

PRIMJER 9.19

Za konzolu zadanu i opterećenu prema slici 9.44 treba odrediti maksimalno naprezanje i ukupni pomak kraja B. Zadano: $F = 2\,\text{kN}$, $l = 1{,}6\,\text{m}$, $E = 200\,\text{GPa}$, $\alpha = 8°$, $b = 3\,\text{cm}$, $h = 20\,\text{cm}$.



Slika 9.44. Koso savijanje konzole pravokutnog presjeka

Najveći momenti savijanja $M_{y\max}$ i $M_{z\max}$ djeluju na mjestu uklještenja, pa će se u tom presjeku pojaviti i najveće naprezanje. Momenti savijanja iznose:

$$M_{y\max} = -F\cos\alpha\, l = 2000\,(\cos 10°)\,1{,}6$$

$$M_{y\max} = 3151{,}4\ \mathrm{Nm}$$

$$M_{z\max} = F\sin\alpha\, l = 2000\,(\sin 10°)\,1{,}6$$

$$M_{z\max} = 555{,}7\ \mathrm{Nm}.$$

Momenti tromosti I_y i I_z jesu:

$$I_y = \frac{b\,h^3}{12} = \frac{3\cdot 20^3}{12}\ \mathrm{cm}^4$$

$$I_y = 2000\ \mathrm{cm}^4 = 2000\cdot 10^{-8}\ \mathrm{m}^4 = 20\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^4$$

$$I_z = \frac{h\,b^3}{12} = \frac{20\cdot 3^3}{12}\ \mathrm{cm}^4$$

$$I_z = 45\ \mathrm{cm}^4 = 0{,}45\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^4.$$

Sada možemo izračunati maksimalno naprezanje na mjestu uklještenja pomoću izraza (9.44). Maksimalno naprezanje pojavit će se za $z_{\max} = \pm h/2$ i $y = \pm b/2$. Sada je

$$\sigma_{x\max} = \pm\frac{M_{y\max}}{I_y} z_{\max} \pm \frac{M_{z\max}}{I_z} y_{\max}$$

$$\sigma_{x\max} = \frac{3151{,}4}{20\cdot 10^{-6}}\cdot 10\cdot 10^{-2} + \frac{555{,}7}{0{,}45\cdot 10^{-6}}\cdot 1{,}5\cdot 10^{-2}\ \mathrm{Pa}$$

$$\sigma_{x\max} = 34{,}28\cdot 10^6\ \mathrm{Pa} = 34{,}28\ \mathrm{MPa}.$$

Prema primjeru 9.9 progib konzole opterećene na kraju silom F iznosi

$$w = \frac{Fl^3}{3\,EI}.$$

U tom slučaju osim pomaka točke B u smjeru osi z, tj. w_B, pojavit će se i pomak v_B u smjeru osi y. Ti pomaci iznose:

$$w_B = \frac{F_z l^3}{3\,EI_y} = \frac{Fl^3}{3\,EI_y}\cos\alpha$$

$$v_B = \frac{F_y l^3}{3\,EI_z} = \frac{Fl^3}{3\,EI_z}\sin\alpha.$$

Kad uvrstimo konkretne podatke, dobit ćemo

$$w_B = 2{,}017\ \mathrm{mm}$$

$$v_B = 15{,}81\ \mathrm{mm}.$$

Ukupni progib iznosi

$$\delta_B = \sqrt{v_B^2 + w_B^2} = 15{,}94\ \mathrm{mm}.$$

Vidimo da se, iako sila djeluje gotovo vertikalno, pomak kraja konzole zbiva gotovo horizontalno. To je zbog toga što je moment tromosti I_y mnogo veći od I_z.

9.11. Savijanje debelog zakrivljenog štapa

Pretpostavke o deformiranju. Analizu naprezanja u debelim zakrivljenim štapovima provest ćemo uz ove pretpostavke o deformiranju i raspodjeli naprezanja:

1. poprečni presjeci ostaju u toku deformiranja ravni i okomiti na deformiranu težišnu liniju štapa,
2. u štapu vlada približno jednoosno stanje naprezanja.

Izvedeni izrazi vrijedit će uz ova ograničenja:

1. poprečni presjeci štapa, a time i čitav štap, imaju jednu ravninu simetrije u kojoj leži težišna linija štapa. Težišna linija jest linija koja spaja težišta svih poprečnih presjeka;
2. štap je opterećen na čisto savijanje, tj. sve komponente unutrašnjih sila jednake su nuli osim momenta savijanja.

Na slici 9.45 prikazan je debeli zakrivljeni štap koji je opterećen na savijanje spregovima M. Na slici su upotrijebljene ove oznake: r_1 i r_2 unutrašnji i vanjski polumjer štapa, r_T polumjer težišne linije, r_n polumjer neutralne linije, r i φ polarne koordinate, z udaljenost elementa od neutralne plohe. Težišna linija jest linija koja spaja težišta svih poprečnih presjeka.

Geometrijska analiza. Na slici 9.45b crktano je prikazan nedeformirani oblik elementa $ABCD$, a punom crtom deformirani element $A_1B_1C_1D_1$. Stranice elementa $\overline{AB}$ i CD prije deformiranja čine kut $\mathrm{d}\varphi$, a nakon deformiranja kut $\mathrm{d}\varphi + \mathrm{d}\alpha$. Vlakno $\overline{EF}$ deformira se i prelazi u $\overline{E_1F_1}$, pa je duljinska deformacija tog vlakna dana izrazom

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\overline{E_1F_1} - \overline{EF}}{\overline{EF}}. \tag{9.51}$$

Kako je $\quad \overline{EF} = r\,\mathrm{d}\varphi$ i $\overline{E_1F_1} = \overline{EF} + z\,\mathrm{d}\alpha = r\,\mathrm{d}\varphi + z\,\mathrm{d}\alpha,$

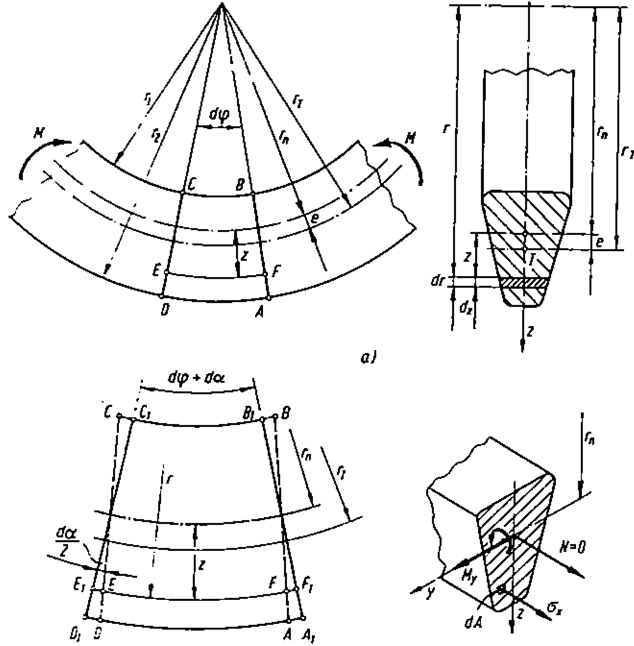
bit će

$$\varepsilon_\varphi = \frac{r\,\mathrm{d}\varphi + z\,\mathrm{d}\alpha - r\,\mathrm{d}\varphi}{r\,\mathrm{d}\varphi} = \frac{z\,\mathrm{d}\alpha}{r\,\mathrm{d}\varphi}$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{r - r_n}{r}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\varphi}. \tag{9.52}$$

U izrazu su r_n i $\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}\varphi$ nepoznati parametar, odnosno nepoznata funkcija. Prema izrazu (9.52) vidimo da su duljinske deformacije raspodijeljene po visini presjeka po

zakonu hiperbole. Deformacija na unutrašnjoj strani veća je od deformacije na vanjskoj strani. Po pretpostavci o deformiranju produljenja Δl jednoliko rastu od neutralne linije prema krajevima presjeka. Zbog zakrivljenosti elementa početna duljina vlakna na unutrašnjoj strani manja je od početne duljine vlakna na vanjskoj strani. Uz jednaki Δl to znači da će $\Delta l/l = \varepsilon$ biti veće na unutrašnjoj strani.



Slika 9.45. Savijanje debelog zakrivljenog štapa

Primjena Hookeova zakona. Kako po pretpostavci imamo jednoosno stanje naprezanja, bit će

$$\sigma_\varphi = E\,\varepsilon_\varphi = \frac{r-r_n}{r} E \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\varphi}. \tag{9.53}$$

Primjena uvjeta ravnoteže. Uvjeti ravnoteže elementa na slici 9.45c glase:

$$\int_A \sigma_\varphi \,\mathrm{d}A = N = 0 \tag{9.54}$$

$$\int_A \sigma_\varphi (r-r_n)\,\mathrm{d}A = M. \tag{9.55}$$

Ako uvrstimo izraz (9.53) u (9.54) i sredimo, dobit ćemo

$$E\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\varphi}\int_A \left(1-\frac{r_n}{r}\right)\mathrm{d}A = 0. \tag{9.56}$$

Ovdje smo $E\,\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}\varphi$ izvukli pred znak integrala jer je ta veličina konstantna za svaki presjek, a integrira se po presjeku. Daljnjim sređivanjem gornjeg izraza dobit ćemo

$$\int_A \mathrm{d}A = r_n \int_A \frac{\mathrm{d}A}{r}.$$

Integral na desnoj strani jest površina presjeka A, pa konačno imamo

$$r_n = \frac{A}{\int_A \frac{\mathrm{d}A}{r}} \tag{9.57}$$

odnosno

$$r_n = \frac{A}{J_1}, \tag{9.58}$$

gdje je

$$J_1 = \int_A \frac{\mathrm{d}A}{r} \tag{9.59}$$

geometrijska karakteristika presjeka štapa. Na taj smo način odredili prvi nepoznati parametar, tj. polumjer neutralne površine.

Nakon uvrštavanja izraza (9.53) u (9.55) i sređivanja bit će

$$E\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\varphi}\int_A (r-r_n)^2 \frac{\mathrm{d}A}{r} = M_y. \tag{9.60}$$

Integral I u gornjem izrazu možemo preurediti ovako:

$$I = \int_A \frac{(r-r_n)^2}{r}\mathrm{d}A = \int_A \frac{r^2 - r\cdot r_n - r\cdot r_n + r_n^2}{r}\mathrm{d}A = \int_A (r-r_n)\,\mathrm{d}A - r_n \int_A \frac{r-r_n}{r}\mathrm{d}A.$$

Budući da je prema (9.56) $\int (r-r_n)\,\mathrm{d}A/r = 0$, bit će

$$I = \int_A r\,\mathrm{d}A - r_n \int_A \mathrm{d}A.$$

Prvi integral na desnoj strani jest statički moment površine poprečnog presjeka oko osi kroz središte zakrivljenosti, pa je jednak $r_T A$. Drugi integral na desnoj strani gornjeg izraza jest površina poprečnog presjeka A, pa je

$$I = r_T A - r_n A = e\,A = S_y, \tag{9.61}$$

gdje je $e = r_T - r_n$ udaljenost neutralne osi od težišne osi, a S_y statički moment presjeka oko neutralne osi. Kad izraz (9.61) ponovno uvrstimo u (9.60), dobit ćemo

$$E\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\varphi} S_y = M_y,$$

pa je

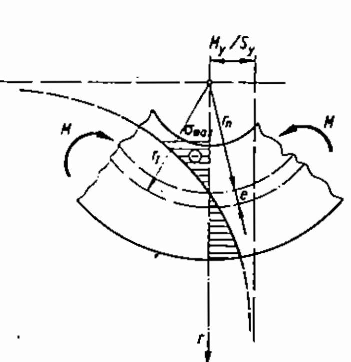
$$\frac{d\alpha}{d\varphi}=\frac{M_y}{E S_y}. \tag{9.62}$$

Izraz (9.62) određuje vrijednost nepoznate funkcije $d\alpha/d\varphi$. Nakon uvrštavanja izraza (9.62) u (9.53) slijedi

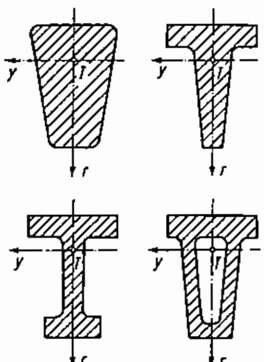
$$\sigma_\varphi=\frac{M_y}{S_y}\left(1-\frac{r_n}{r}\right). \tag{9.63}$$

Iz izraza (9.63) dobivamo raspodjelu naprezanja po presjeku štapa. Za razliku od ravnog štapa u kome su naprezanja pri savijanju raspodijeljena linearno u debelom zakrivljenom štapu naprezanja su raspodijeljena po zakonu hiperbole.

Kad r u izrazu (9.63) teži prema nuli, σ_φ teži prema $-\infty$. Kad r teži prema $+\infty$, σ_φ teži prema M_y/S_y. Raspored naprezanja prikazan je na slici 9.46. Ako je presjek simetričan prema osi y, maksimalno naprezanje djeluje na unutrašnjoj strani štapa. Takav oblik poprečnog presjeka nije povoljan jer materijal na vanjskoj strani štapa nije dobro iskorišten. Pri oblikovanju štapa treba nastojati da se težište približi unutarnjoj strani presjeka, tako da naprezanja na obje strane budu po mogućnosti jednaka. Trapezni oblik presjeka, kao na slici 9.45a, zadovoljava taj uvjet. Na slici 9.47 prikazani su još neki povoljni oblici poprečnog presjeka štapa.



Slika 9.46. Raspodjela naprezanja u debelom zakrivljenom štapu



Slika 9.47. Racionalni presjeci debelog zakrivljenog štapa

Promjena zakrivljenosti. Neka je r_n polumjer zakrivljenosti neutralne plohe prije deformiranja, a r_n' polumjer neutralne plohe poslije deformiranja. Kako vlakna neutralne plohe ne mijenjaju duljinu, vrijedi

$$r_n'(d\alpha+d\varphi)=r_n\, d\varphi,$$

pa je

$$r_n'\left(1+\frac{d\alpha}{d\varphi}\right)=r_n,$$

odnosno

$$\frac{1}{r_n}+\frac{1}{r_n}\frac{d\alpha}{d\varphi}=\frac{1}{r_n'}$$

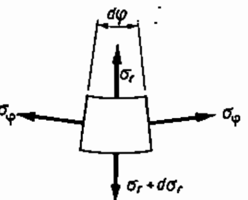
$$\frac{1}{r_n'}-\frac{1}{r_n}=\frac{1}{r_n}\frac{d\alpha}{d\varphi}.$$

Ako uzmemo u obzir izraz (9.62) i činjenicu da je $r_n \simeq r_T$, bit će

$$\frac{1}{r_T'}-\frac{1}{r_T}=\frac{1}{r_T}\frac{M_y}{S_y}, \tag{9.64}$$

gdje je r_T' polumjer težišne linije nakon deformiranja.

Izraz za raspodjelu naprezanja (9.63) izveden je uz pretpostavku da u štapu vlada jednoosno stanje naprezanja, što ne odgovara stvarnosti. Element štapa u polarnim koordinatama prikazan je na slici 9.48. Očito je da samo naprezanja σ_φ ne mogu biti u ravnoteži. Moraju djelovati i naprezanja σ_r. Međutim, točnija analiza metodama teorije elastičnosti pokazuje da ta naprezanja nemaju velik utjecaj. Prema egzaktnom rješenju, koje se može naći u literaturi [28], str. 313, naprezanja σ_φ i σ_r raspodijeljena su po logaritamskom zakonu koji se malo razlikuje od hiperboličkog.



Slika 9.48. Osim naprezanja σ_φ na element debelog štapa djeluje i naprezanje σ_r ili je $\sigma_r \ll \sigma_\varphi$

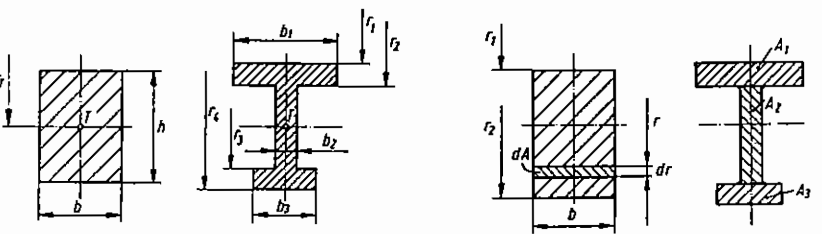
PRIMJER 9.20

Za presjeke zadane prema slici 9.49a odrediti geometrijsku karakteristiku presjeka J_1.

a) Pravokutni presjek

Prema izrazu (9.59) vrijedi

$$J_1=\int_A \frac{dA}{r}.$$



Slika 9.49

Kako je $dA = b\,dr$, bit će

$$J_1 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{b\,dr}{r} = b \ln \frac{r_2}{r_1}. \tag{9.65}$$

b) Nesimetrični I-presjek

Prema pravilima integriranja plošnih integrala vrijedi

$$\int_A f(y, r)\,dA = \int_{A_1} f(y,r)\,dA_1 + \int_{A_2} f(y,r)\,dA_2 + \int_{A_3} f(y,r)\,dA_3,$$

gdje je $A = A_1 + A_2 + A_3$. Integrali na desnoj strani predstavljaju geometrijske karakteristike dijelova presjeka A_1, A_2 i A_3, a na lijevoj strani geometrijsku karakteristiku čitava presjeka, pa je

$$J_1 = J_{1,1} + J_{1,2} + J_{1,3} = \sum_{i=1}^{3} J_{1,i}. \tag{9.66}$$

Uzmemo li u obzir rješenje za pravokutnik (9.65), bit će

$$J_1 = b_1 \ln \frac{r_2}{r_1} + b_2 \ln \frac{r_3}{r_2} + b_3 \ln \frac{r_4}{r_3}.$$

Općenito geometrijska karakteristika presjeka sastavljenog od većeg broja pravokutnika, kao na slici 9.49, iznosi

$$J_1 = \sum_{i=1}^{n} b_i \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}. \tag{9.67}$$

PRIMJER 9.21

Usporediti naprezanja u četiri štapa jednakog pravokutnog poprečnog presjeka širine $b = 5$ cm i visine $h = 6$ cm. Svi štapovi opterećeni su na čisto savijanje momentom $M_y = 3000$ Nm. Polumjer zakrivljenosti štapova iznosi:

a) $r_T = \infty$	ravni štap	c) $r_T = 9$ cm
b) $r_T = 30$ cm	zakrivljeni štap	d) $r_T = 6$ cm.

a) U ovom slučaju radi se o ravnom štapu, pa su naprezanja raspodijeljena po zakonu pravca. Maksimalno naprezanje iznosi

$$\sigma_{max} = \frac{M_y}{W_y}.$$

Kako je $W_y = \frac{bh^2}{6} = \frac{5 \cdot 6^2}{6}$ cm$^3 = 30 \cdot 10^{-6}$ m^3, bit će

$$\sigma_{max} = \frac{3000}{30 \cdot 10^{-6}}\ \text{MPa} = 100\ \text{MPa}.$$

b) U ovom slučaju radi se o zakrivljenom štapu, pa se naprezanje računa prema izrazu

$$\sigma_\varphi = \frac{M_y}{S_y}\left(1 - \frac{r_n}{r}\right),$$

gdje je $r_n = A/J_1$. Kako je $J_1 = b \ln \frac{r_2}{r_1}$, $A = b\,h$, bit će

$$r_n = \frac{h}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

$$r_n = \frac{6}{\ln \frac{33}{27}}\ \text{cm} = 29{,}899732\ \text{cm}$$

$$e = r_T - r_n = 0{,}100268\ \text{cm}$$

$$S_y = A\,e = 3{,}008042\ \text{cm}^3 = 3{,}008042\ 10^{-6}\ \text{m}^3.$$

Naprezanje na unutrašnjoj strani iznosi

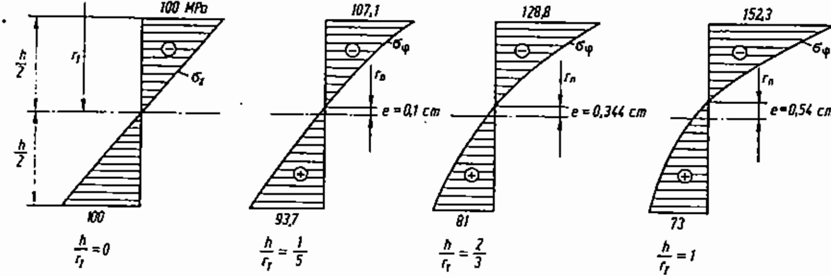
$$\sigma_\varphi(r_1) = \frac{M_y}{S_y}\left(1 - \frac{r_n}{r_1}\right) = \frac{3000}{3{,}008042 \cdot 10^{-6}}\left(1 - \frac{29{,}8997}{27}\right)\text{Pa}$$

$$\sigma_\varphi(r_1) = -107{,}11\ \text{MPa},$$

dok su naprezanja na vanjskoj strani

$$\sigma_\varphi(r_2) = 93{,}697\ \text{MPa}.$$

Na sličan način možemo odrediti naprezanja u ostalim štapovima. Rezultati za sve štapove prikazani su usporedno na slici 9.50.



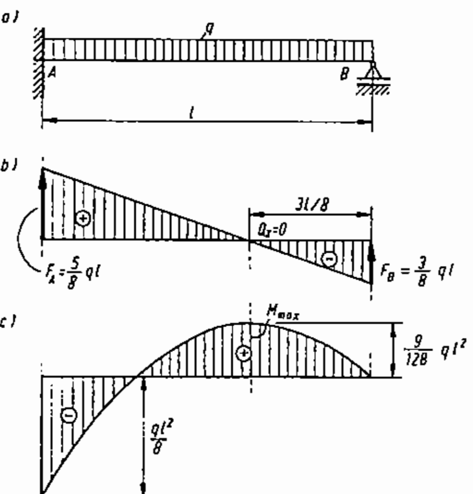
Slika 9.50. Raspored naprezanja u debelim štapovima različite zakrivljenosti. Štapovi su opterećeni jednakim momentom i imaju isti poprečni presjek: a) $h/r_T = 0$, b) $h/r_T = 1/5$, c) $h/r_T = 2/3$, d) $h/r_T = 1$

9.12. Statički neodređeni zadaci pri savijanju

Rješavanju zadataka sa statički neodređenim štapovima koji su opterećeni na savijanje pristupamo na isti način kao i kod osnog opterećenja štapa, odnosno kod štapova opterećenih na uvijanje. Pored uvjeta ravnoteže treba postaviti onoliko uvjeta deformiranja koliko je puta zadatak statički neodređen. Zadani problem svodimo na osnovni statički određeni problem uklanjanjem prekobrojnih veza i dodavanjem na tom mjestu nepoznatih reakcija X_i. Nepoznate reakcije određujemo iz uvjeta da je na mjestu njihova djelovanja, tj. na mjestu uklanjanja oslonaca odgovarajući pomak jednak nuli. Postupak rješavanja objasnit ćemo na nekoliko primjera.

PRIMJER 9.22

Za poduprtu konzolu, opterećenu prema slici 9.51, naći reakcije veza te skicirati dijagrame unutrašnjih sila Q_z i M_y. Zadano: q i l.



Slika 9.51. Konzola poduprta na jednom kraju

Zadana greda statički je neodređena jer ima 4 nepoznate reakcija veza: F_{Ax}, F_{Ay}, M_A u osloncu A te F_B u osloncu B, a na raspolaganju su nam samo tri nezavisna uvjeta ravnoteže: $\Sigma F_x=0$, $\Sigma F_y=0$, $\Sigma M_A=0$. Kako nema horizontalnih sila, vidimo da je $F_{Ax}=0$, i prvi uvjet ravnoteže možemo ispustiti iz daljnjeg razmatranja. Zadanu gredu možemo pretvoriti u statički određenu na više načina. Mi ćemo pokazati dva načina zamjene zadane grede osnovnom.

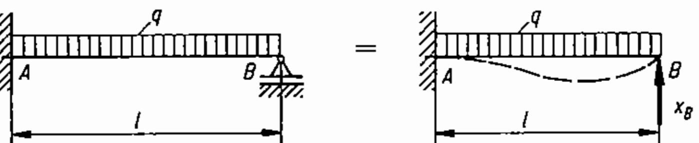
1. način:

Gredu smo oslobodili oslonca B dodavanjem sile F_B, kako je prikazano na slici 9.52. Uvjet deformiranja sada glasi

$$w_B = w'_B + w''_B = 0. \tag{9.68}$$

Pomak w_B odredit ćemo metodom superpozicije, tj. zamislit ćemo da djeluje samo opterećenje q i odrediti pomak w'_B, a zatim ćemo zamisliti da djeluje samo nepoznata reakcija F_B i odrediti pomak w''_B. Prema tablici 9.2 vrijedi:

$$w'_B = \frac{ql^4}{8\,EI} \qquad w''_B = -\frac{F_B l^3}{3\,EI}. \tag{9.69}$$



Slika 9.52. Uklanjanjem oslonca B poduprta konzola postaje statički određena

Ispred izraza za w''_B nalazi se negativan predznak jer sila F_B djeluje u suprotnom smjeru od onog naznačenog u tablici 9.2. Kad se izraz (9.69) uvrsti u (9.68), dobit će se

$$w_B = \frac{ql^4}{8\,EI} - \frac{F_B l^3}{3\,EI} = 0$$

Odavde lako možemo dobiti da je $F_B = 3ql/8$. Kad smo odredili reakciju F_B, možemo pomoću uvjeta ravnoteže odrediti ostale reakcije. One su:

$$F_{Ay} = \frac{5}{8}ql, \qquad M_A = \frac{ql^2}{8}.$$

2. način:

U zadanoj gredi uklještenje zamjenjujemo nepomičnim osloncem i u njemu dodajemo nepoznati moment M_A, kao na slici 9.53. Uvjet deformiranja u tom slučaju glasi

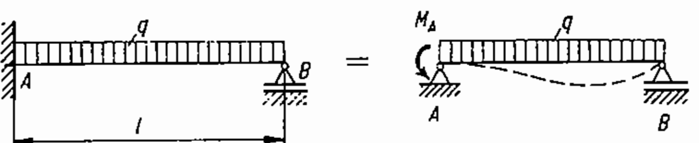
$$\alpha_A = \alpha'_A + \alpha''_A = 0, \tag{9.70}$$

gdje je α'_A kut koji nastaje zbog kontinuiranog opterećenja q, α'' kut koji izaziva moment M_A. Prema tablici 9.2 izlazi

$$\alpha'_A = \frac{ql^3}{24\,EI}, \qquad \alpha''_A = -\frac{M_A}{3\,EI},$$

pa je

$$\alpha_A = \frac{ql^3}{24\,EI} - \frac{M_A l}{3\,EI} = 0.$$



Slika 9.53. Pretvaranjem uklještenja u nepomični oslonac poduprta konzola postaje statički određena

Odavde je

$$M_A=\frac{ql^2}{8}.$$

Dakle, dobili smo isti rezultat kao i kad smo rješavali zadatak na prvi način.

Dijagram poprečnih sila prikazan je na slici 9.51b. Vidimo da je $Q_z=0$ na udaljenosti $3l/8$ od desnog oslonca. Na tom mjestu moment ima maksimalnu vrijednost koja iznosi

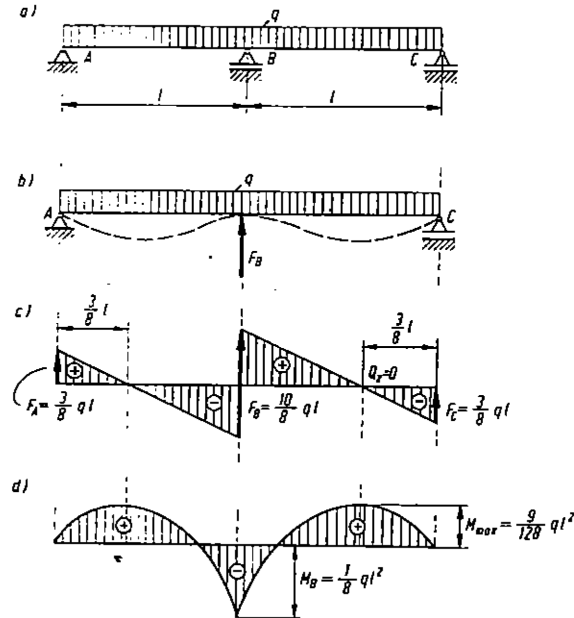
$$M_{y\,\max}=F_B\frac{3}{8}l-q\frac{3}{8}l\frac{1}{2}\frac{3}{8}l.$$

Kad u taj izraz uvrstimo $F_B=3ql/8$ i sredimo, dobit ćemo

$$M_{yA}=-M_A=-\frac{1}{8}ql^2=\frac{16}{128}ql^2.$$

PRIMJER 9.23

Greda na tri oslonca opterećena je jednoliko kontinuirano, prema slici 9.54. Naći reakcije u osloncima i skicirati dijagrame unutrašnjih sila. Zadano: q, l.



Slika 9.54. Greda na tri oslonca statički je neodređena

Osnovna statički određena greda prikazana je na slici 9.54b. Uvjet deformiranja u tom slučaju glasi

$$w_B=w_B'+w_B'',$$

gdje je w_B' progib zbog kontinuiranog opterećenja q, a w_B'' progib zbog reakcije F_B. Prema tablici 9.2. imamo:

$$w_B'=\frac{5q\,(2l)^4}{384\,EI},\qquad w_B''=-\frac{F_B\,(2l)^3}{48\,EI},$$

pa je

$$w_B=\frac{5q\,(2l)^4}{384\,EI}-\frac{F_B\,(2l)^3}{48\,EI}=0.$$

Odavde je

$$F_B=\frac{10}{8}ql.$$

Iz uvjeta simetrije slijedi da je $F_A=F_C$, a iz uvjeta $\Sigma F_y=0$:

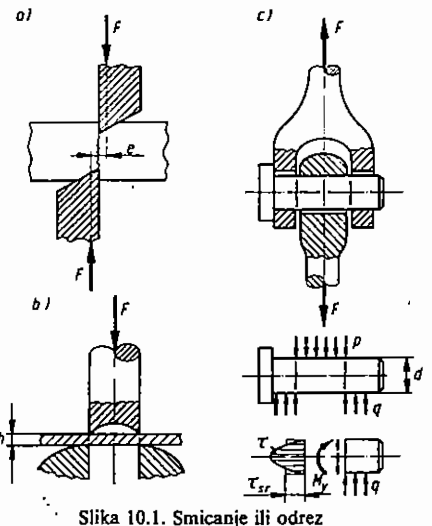
$$F_A=F_C=\frac{3}{8}ql.$$

Dijagrami poprečnih sila i momenata savijanja prikazani su na slici 9.54c i d. Kako tangenta na elastičnu liniju iznad srednjeg oslonca B ostaje horizontalna, može se taj problem razmatrati kao da se sastoji od dvije simetrično postavljene konzole koje su uklještene u osloncu B i poduprte u osloncima A i C. Reakcije i dijagrami unutrašnjih sila slažu se u tom slučaju s reakcijama i dijagramima poprečnih sila iz prethodnog primjera.

10. SMICANJE

10.1. Osnovni pojmovi

Čisto smicanje vrlo je teško ostvariti. U praksi se smicanje pojavljuje gotovo uvijek povezano sa savijanjem. U jednom broju slučajeva savijanje je predominantno, dok je smicanje zanemarivo. Ponekad je situacija obrnuta. Naprezanja koja uzrokuje smicanje mnogo su veća od naprezanja koja uzrokuje savijanje. Na slici 10.1 prikazano je nekoliko slučajeva opterećenja smicanjem. Pri rezanju štapa prema slici 10.1a pored smicanja javlja se i savijanje momentom $M = Fe$. Slična je

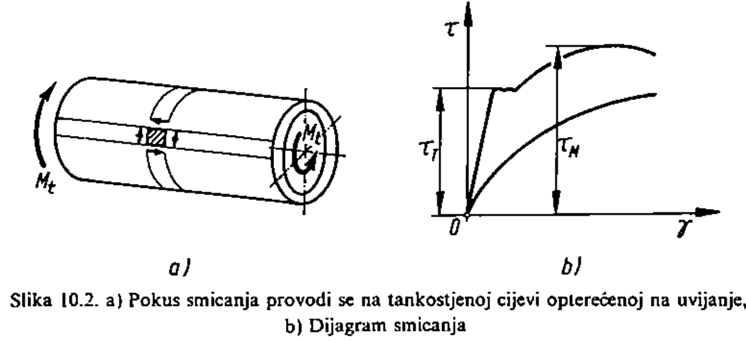


Slika 10.1. Smicanje ili odrez

situacija i kod probijanja, prema slici 10.1b. Raspored naprezanja po presjeku smicanja nije jednolik. Kao prvo približenje može se usvojiti raspored po paraboli, kako je to objašnjeno u poglavlju 9.3.

Za eksperimentalno određivanje svojstava materijala pri čistom smicanju koriste se razne naprave i modeli. Najčešće se u tu svrhu koristi uvijanje tankih cijevi,

kako je ilustrirano na slici 10.2a. Pri tome se dobivaju dijagrami smicanja, tj. $\tau=f(\gamma)$. Dijagrami smicanja za neke metale prikazani su kvalitativno na slici 10.2b. Oni se po obliku podudaraju s dijagramima rastezanja.



Slika 10.2. a) Pokus smicanja provodi se na tankostjenoj cijevi opterećenoj na uvijanje, b) Dijagram smicanja

10.2. Približan proračun dijelova opterećenih na smicanje

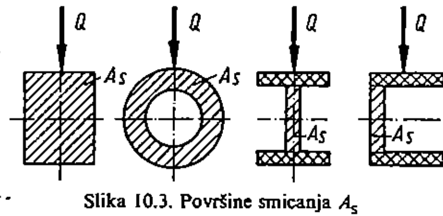
Točan proračun dijelova opterećenih na smicanje vrlo je teško provesti, pa se u praksi provodi pojednostavljen približan proračun, tj. određuje se srednje posmično naprezanje τ_{sr}. Maksimalno posmično naprezanje τ_{max} može dva i više puta biti veće od srednjeg τ_{sr}. To se mora uzeti u obzir kod odabiranja dopuštenog srednjeg posmičnog naprezanja, odnosno kod odabiranja koeficijenta sigurnosti. Dopušteno srednje naprezanje τ_{dsr} i lomno srednje naprezanje τ_{Msr} povezuju se često s dopuštenim vlačnim naprezanjem σ_{dop} i vlačnom čvrstoćom σ_M, tj.

$$\tau_{dsr}=k_d\,\sigma_{dop}, \qquad \tau_{Msr}=k_M\,\sigma_M. \tag{10.1}$$

Koeficijenti k_d i k_M imaju razne vrijednosti za razne materijale i određuju se na temelju pokusa i iskustva. Tako je za čelik $k_d=k_M=0{,}8$, za sivi lijev $k_d=k_M=1{,}1$. Podaci za ostale materijale mogu se naći u priručnicima. Srednje posmično naprezanje određuje se pomoću izraza

$$\tau_{sr}=\frac{F}{A_s}=\frac{Q}{A_s}, \tag{10.2}$$

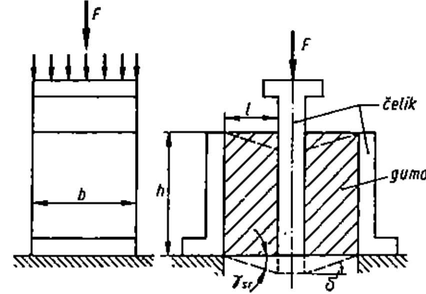
gdje je A_s dio presjeka koji sudjeluje u smicanju. Na slici 10.3 prikazano je nekoliko presjeka. Dijelovi poprečnog presjeka koji neznatno sudjeluju pri smicanju dvostruko su iscrtani i pri određivanju A_s ne trebaju se uzeti u obzir.



Slika 10.3. Površine smicanja A_s

10.3. Pomaci pri smicanju

Točno određivanje pomaka i deformiranog oblika tijela izloženih smicanju teško je provesti kao i određivanje naprezanja, pa se i ovdje pribjegava približnom proračunu. Postupak ćemo objasniti na primjeru gumenog amortizera prikazanog na slici 10.4. Dva gumena bloka dimenzija $a\times b\times c$ vezana su pomoću čeličnih



Slika 10.4. Deformiranje gumenog amortizera

dijelova, kako je to pokazano na slici 10.4. Kako se sila F raspodjeljuje na oba bloka podjednako, poprečna sila u bloku iznosi $Q=F/2$. Srednje naprezanje u bloku iznosi

$$\tau_{sr}=\frac{Q}{A}.$$

Kutna je deformacija prema Hookeovu zakonu

$$\gamma_{sr}=\frac{\tau_{sr}}{G}=\frac{F}{2AG}.$$

Približni deformirani oblik blokova prikazan je crtkano. Pomak δ iznosi

$$\delta=\gamma_{sr}\,l=\frac{Fl}{2AG}. \tag{10.3}$$

Veličina AG naziva se smična krutost.

PRIMJER 10.1

Zglobna veza, prema slici 10.1c, opterećena je silom F. Odrediti dopuštenu silu F_{dop} kojom smijemo opteretiti vezu ako je zadano: $d=20\,\text{mm}$, $k_d=0{,}8$, $\sigma_{dop}=120\,\text{MPa}$.

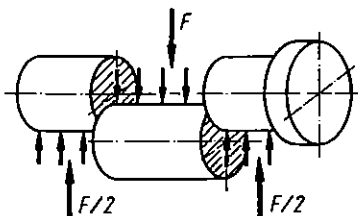
Zamišljeni odrez osovinice nastupio bi prema slici 10.5. Vidimo da u odrezu sudjeluju dva poprečna presjeka pa je

$$\tau_{sr}=\frac{F}{2A}\leqslant\tau_{dsr}.$$

Odavde je

$$F_{dop} = 2A\,\tau_{dsr} = 2\frac{d^2\pi}{4}k_d\,\sigma_{dop}$$

$$F_{dop} = 2\frac{20^2\pi}{4}0{,}8 \cdot 120\,\text{N} = 60318\,\text{N} = 60{,}3\,\text{kN}.$$



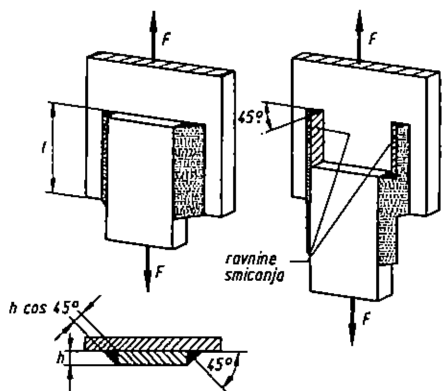
Slika 10.5. Odrez osovinice

PRIMJER 10.2

Naći srednje posmično naprezanje u zavarenom spoju, prema slici 10.6a. Zadano: F, l, h.

Smicanje će nastati po ravninama za koje je površina smicanja najmanja. To su, u tom slučaju, ravnine koje sa ravninama štapova čine kut od 45°, prema slici 10.6b. Površina smicanja iznosi $A = 2l\,h\cos 45°$, pa je

$$\sigma_{sr} = \frac{F}{A} = \sqrt{2}\frac{F}{lh}.$$



Slika 10.6. Smicanje zavarenog spoja

PRIMJER 10.3

Kružnim probijačem probija se otvor u limu debljine h. Odrediti najmanji promjer otvora koji se može probiti probijačem ako je zadano: dopušteno tlačno naprezanje probijača $\sigma_{dop} = 180\,\text{MPa}$, čvrstoća lima $\sigma_M = 220\,\text{MPa}$, koeficijent $k_M = 0{,}8$, $h = 5\,\text{mm}$.

Dopuštena sila kojom smijemo opteretiti probijač ovisi o kvadratu promjera, dok potrebna sila probijanja ovisi o smičnoj površini $A = \pi d h$, tj. sila probijanja ovisi o prvoj potenciji promjera. Prema tome smanjivanjem promjera otvora brže opada dopuštena sila probijača od potrebne sile probijanja. Sila kojom smijemo opteretiti probijač iznosi

$$F_{dop} \leqslant \frac{d^2\pi}{4}\sigma_{dop}.$$

Potrebna sila smicanja jest

$$F_s = h\,d\pi\,\tau_{M\,sr} = h\,d\pi\,k_M\,\sigma_M.$$

Izjednačenjem tih sila dobit ćemo

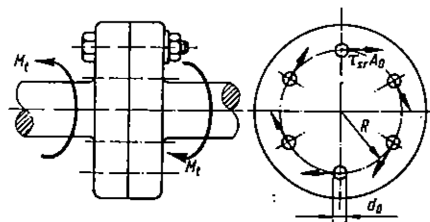
$$\frac{d^2\pi}{4}\sigma_{dop} \geqslant d\pi\,h\,k_M\,\sigma_M,$$

odnosno

$$d \geqslant 4\,k_M\frac{\sigma_M}{\sigma_{dop}}h = 19{,}56\,\text{mm}.$$

PRIMJER 10.4

Naći prosječno posmično naprezanje u vijcima kojima su spojene osovine, prema slici 10.7. Zadano: M_t, R, d_0.



Slika 10.7. Odrez vijaka u krutoj spojci

Pretpostavit ćemo da se moment uvijanja prenosi podjednako preko svih šest vijaka. Sila u jednom vijku iznosi $\tau_{sr}\,A_0$, pa je ukupni moment jednak

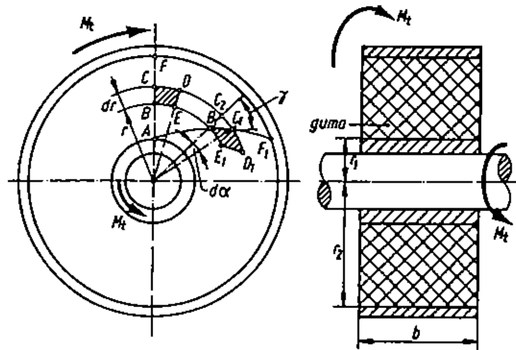
$$M_t = 6\tau_{sr}\,A_0\,R.$$

Odavde je

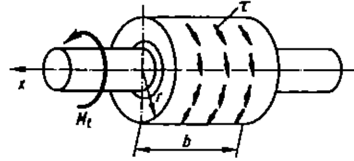
$$\tau_{sr} = \frac{M_t}{6\,A_0\,R} = \frac{2M_t}{3\pi\,d_0^2\,R}.$$

U stvarnosti se zbog netočnog dosjedanja nikad ne prenosi sila jednako na sve vijke, pa će i naprezanje u pojedinim vijcima biti veće od izračunatog. To se mora uzeti u obzir pri izboru dopuštenog naprezanja.

Gumeni torzijski amortizer prikazan na slici 10.8 sastoji se od vanjske i unutrašnje čelične cijevi među kojima se nalazi šuplji gumeni valjak. Odrediti kut α za koji će se okrenuti vanjska cijev ako je opteretimo momentom M_t i ako je unutrašnja cijev nepomična. Zadano: M_t, r_1, r_2, b, G (modul smicanja gume).



Slika 10.8. Smicanje torzijskog amortizera



Slika 10.9. Posmična naprezanja u torzijskom amortizeru

Pri deformiranju pravac $ABCF$ prelazi u krivulju $AB_1C_1F_1$. Ortogonalni element $BCDE$ prelazi u romboid $B_1C_1D_1E_1$. Klizanje stranice CD prema stranici BE elementa iznosi

$$\overline{C_2C_1} = r\,\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}r\,\gamma.$$

Odavde je

$$\mathrm{d}\alpha = \gamma\frac{\mathrm{d}r}{r}.$$

Pomoću Hookeova zakona za smicanje možemo dobiti

$$\mathrm{d}\alpha = \frac{\tau}{G}\frac{\mathrm{d}r}{r}.$$

Veličinu posmičnog naprezanja τ odredit ćemo razmatranjem ravnoteže dijela amortizera koji dobivamo cilindričnim presjekom. Po tom presjeku posmična naprezanja τ jednoliko su raspodijeljena. Ravnoteža momenata oko osi x glasi

$$\Sigma M_x = M_t - \underbrace{\overbrace{2r\pi b}^{\text{površina}}\tau}_{\text{sila}}\underbrace{r}_{\text{krak}} = 0.$$

Odavde je

$$\tau = \frac{M_t}{2\pi b r^2},$$

što uvršteno u gornji izraz za $\mathrm{d}\alpha$ daje

$$\mathrm{d}\alpha = \frac{M_t}{2\pi b G}\frac{\mathrm{d}r}{r^3}$$

odnosno

$$\alpha = \frac{M_t}{2bG}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r^3} = \frac{M_t}{4\pi b G}\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right).$$

Za konkretne vrijednosti:

$$M_t = 4\,\mathrm{kNm},\quad r_1 = 10{,}2\,\mathrm{cm},\quad r_2 = 18{,}6\,\mathrm{cm},\quad b = 7\,\mathrm{cm},$$

$$\tau_{dop} = 0{,}9\,\mathrm{MPa},\quad \alpha_{dop} = 40^\circ \;\text{ i }\; G = 0{,}6\,\mathrm{MPa},$$

možemo odrediti veličinu posmičnog naprezanja za $r = r_1$:

$$\tau = \frac{M_t}{2\pi b r_1^2} = \frac{0{,}004}{2\pi\cdot 0{,}07\cdot 0{,}102^2} = 0{,}874\,\mathrm{MPa} < \tau_{dop},$$

odnosno kut zakreta

$$\alpha = \frac{M_t}{4\pi b G}\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right) = \frac{0{,}004}{4\pi\cdot 0{,}07\cdot 0{,}6}\left(\frac{1}{0{,}102^2} - \frac{1}{0{,}186^2}\right) = 0{,}509\,\mathrm{rad}$$

ili

$$\alpha = 29{,}2^\circ < \alpha_{dop}.$$

11. TEORIJE ČVRSTOĆE I ENERGIJA DEFORMIRANJA

11.1. Uvodne napomene

U prethodnim poglavljima razmatrali smo takva opterećenja štapova koja su izazivala u štapovima jednoosno naprezanje σ_x (osno naprezanje, čisto savijanje), odnosno posmično naprezanje τ_{xy} (uvijanje, smicanje). Kod provjere čvrstoće takvog dijela konstrukcije bilo je dovoljno da maksimalno naprezanje usporedimo s kritičnim naprezanjem koje smo odredili analognim pokusom rastezanja, sabijanja ili smicanja. Kritično naprezanje krhkih materijala jednako je čvrstoći materijala (lomnom naprezanju) σ_M, odnosno τ_M. Kritično naprezanje duktilnih (rastezljivih) materijala jednako je granici tečenja σ_T, odnosno τ_T.

Ta bi se metoda provjere čvrstoće vrlo teško primijenila na dvoosno, odnosno troosno stanje naprezanja. Naime, bilo bi potrebno eksperimentalno imitirati sve moguće kombinacije naprezanja, tj. eksperimentalno utvrditi kritično naprezanje za različite kombinacije $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$, pa onda stvarno naprezanje u konstrukciji usporediti s pripadnim kritičnim naprezanjem koje je određeno eksperimentalno. Ispitivanje kritičnog naprezanja za sve materijale i za mnogo kombinacija $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$ bilo bi vrlo skupo i dugotrajno, a za mnoge kombinacije tehnički teško provedivo.

Zbog toga se uvode *teorije čvrstoće* (*kriteriji loma*) koje nastoje da predvide pojavu loma, odnosno tečenja za dvoosno i troosno stanje naprezanja na temelju podataka dobivenih pri jednoosnom rastezanju. Postoji više teorija čvrstoće. Nijedna od njih nije sveobuhvatna, tj. nije upotrebljiva za sve vrste materijala.

Pri razmatranju teorija čvrstoće potrebno je poznavati pojam energije deformiranja, distrozijske i dilatacijske energije. Zato ćemo se, prije nego pristupimo razmatranju teorija čvrstoće, upoznati s tim pojmovima. U mehanici krutih tijela upoznali smo se s pojmovima rada, snage, kinetičke i potencijalne energije.
Kad sila $\vec{F}$ djeluje na česticu P koja se giba po nekoj putanji, kao na slici 11.1, sila vrši rad. Elementarni rad dW na malom pomaku $d\vec{r}$ definiran je izrazom

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F\,dr\cos\alpha = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz \qquad (11.1)$$

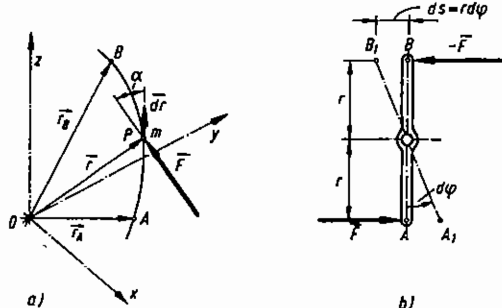
$$W=\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}. \qquad (11.2)$$

Snaga P jest brzina vršenja rada, odnosno derivacija rada po vremenu. Ako izraz (11.1) podijelimo s dt, dobit ćemo

$$P=\frac{dW}{dt}=\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Kako je $d\vec{r}/dt=\vec{v}$, bit će

$$P=\vec{F}\cdot\vec{v}. \qquad (11.3)$$



Slika 11.1. Definicija rada sile $\vec{F}$ i sprega $\vec{M}$

Neka na tijelo djeluje spreg $M=2Fr$ kao na slici 11.1b. Ako se tijelo zakrene za mali kut $d\varphi$, hvatišta sila pomaknuti će se za iznos $ds=r\,d\varphi$, pa će izvršeni rad biti

$$dW=2Fr\,d\varphi.$$

Kako je $2Fr=M$, bit će

$$dW=M\,d\varphi, \qquad (11.4)$$

tj. elementarni rad sprega jednak je umnošku momenta sprega i kuta za koji se tijelo okrene. Deriviranjem izraza (11.4) po vremenu dobit ćemo

$$P=\frac{dW}{dt}=M\frac{d\varphi}{dt}$$

$$P=M\omega. \qquad (11.5)$$

Ako os oko koje djeluje spreg $\vec{M}$ i pravac kutne brzine nisu kolinearni, snaga P određena je skalarnim produktom

$$P=\vec{M}\cdot\vec{\omega}. \qquad (11.6)$$

Na slici 11.2a prikazana je ovisnost sile F u opruzi s linearnom karakteristikom o pomaku slobodnog kraja x. Ta se ovisnost može prikazati pomoću izraza

$$F=c\,x, \qquad (11.7)$$

gdje je c konstanta opruge koja se izražava u jedinicama sile po jedinici duljine, tj. u N/m. Elementarni rad te sile dan je izrazom

$$dW=F\,dx=c\,x\,dx.$$

Ukupni rad te sile na produljenju opruge za iznos Δl iznosi

$$W=\int_0^{\Delta l} c\,x\,dx=c\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\Delta l}$$

$$W=\frac{c\,\Delta l^2}{2}. \qquad (11.8)$$

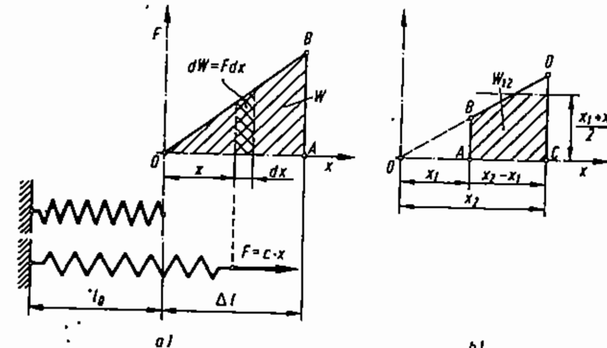
Taj je rad prikazan iscrtanom površinom trokuta OAB na slici 11.2a. Ako produljenje opruge ne počinje iz nenapetog položaja $x=0$, nego iz položaja x_1 do položaja x_2, kako je prikazano na slici 11.2b, izvršeni rad jest

$$W=\int_{x_1}^{x_2} c\,x\,dx=\frac{c}{2}(x_2^2-x_1^2) \qquad (11.9)$$

odnosno

$$W=\left(c\frac{x_2+x_1}{2}\right)(x_2-x_1).$$

i predstavlja iscrtanu površinu trapeza $ABCD$. Prva zagrada jest prosječna vrijednost sile u opruzi na puto od x_1 do x_2, a druga zagrada prevaljeni put. Izvršeni rad sile opruge akumulira se u opruzi u obliku potencijalne energije $U=W$.

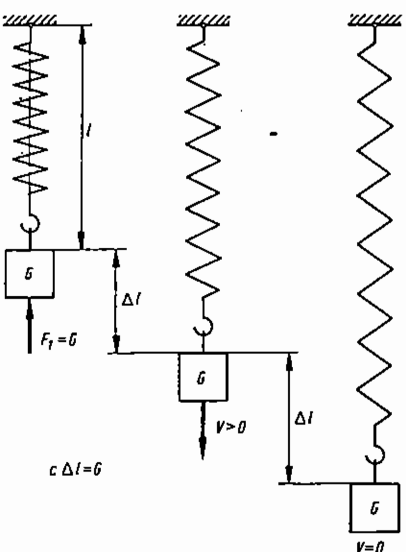


11.2. Rad sile opruge pri deformiranju opruge

Općenito, kad vanjske sile djeluju na deformabilno tijelo, ono se deformira, hvatišta sila se pomiču i vanjske sile vrše rad. Taj rad vanjskih sila troši se djelomično na savladavanje unutrašnjih sila, a djelomično na povećanje kinetičke energije tijela. Ako je tijelo elastično, rad unutrašnjih sila pretvara se potpuno u potencijalnu energiju deformiranja U. Ako tijelo nije elastično, dio rada unutrašnjih sila pretvara se u potencijalnu energiju deformiranja, a dio se rasipa u toplinsku

energiju. Potencijalna energija deformiranja može se iskoristiti za vršenje rada. Tako npr. potencijalna energija deformiranja opruge goni satni mehanizam. Dio rada vanjskih sila, koji se pretvorio u kinetičku energiju, može se pojaviti u dva oblika; kao kinetička energija gibanja tijela ili kao kinetička energija vibriranja tijela.

Ako vanjske sile djeluju na tijelo mirno ili statički, tj. ako su stalno u ravnoteži s unutrašnjim silama, neće doći do porasta kinetičke energije tijela, tj. povećat će se samo njegova potencijalna energija deformiranja. Tu pojavu ćemo opet objasniti na primjeru linearne opruge, prema slici 11.3. Objesimo na oprugu uteg težine G koji pridržavamo silom F_1 (rukom), prema slici 11.3a. Smanjujmo sada vrlo polagano silu F_1. Opruga se deformira, u njoj se javlja sila $F=cx$, tako da je stalno $F+F_1=G$. Kad se opruga produlji za iznos $x=\Delta l=G/c$, sila u opruzi F izjednači se s težinom utega G, uteg miruje i njegovo daljnje pridržavanje nije potrebno. U toku spuštanja uteg je izvršio rad $W_G=G\,\Delta l=c\,\Delta l^2$. Međutim, u opruzi se akumulira energija $U=c\,\Delta l^2/2$; dakle, samo pola izvršenog rada spuštanja pretvoreno je u energiju deformiranja opruge. Preostala polovina rada utrošena je na potiskivanje sile F_1.



Slika 11.3. Pri naglom opterećenju težinom G opruga se dvaput više deformira nego pri mirnom opterećivanju

Ako uteg objesimo na oprugu i zatim naglo pustimo, uteg će se početi ubrzano gibati prema dolje jer je težina G veća od sile opruge F. Kad se opruge produlji za iznos Δl, onda se sila u opruzi izjednači s težinom utega, i uteg se prestane ubrzavati. Do tog trenutka uteg je izvršio rad $W_G=G\,\Delta l$. Pola tog rada utrošeno je na deformiranje opruge, a pola na kinetičku energiju utega. Zakon kinetičke energije glasi

$$E_{k1}+E_{p1}=E_{k2}+E_{p2},$$

gdje je E_k kinetička a E_p potencijalna energija sistema. Indeksi 1 i 2 odnose se na početno odnosno konačno stanje. Kako je $E_{k1}=0$, $E_{p1}=0$, $E_{k2}=mv^2/2$ i $E_{p2}=c\,\Delta l^2/2-mg\,\Delta l$, bit će

$$\frac{mv^2}{2}+\frac{c\,\Delta l^2}{2}=mg.$$

U tom je trenutku sila u opruzi jednaka težini, tj. $mg=c\,\Delta l$. Ako tu vrijednost uvrstimo u gornji izraz i sredimo, dobit ćemo izraz za brzinu v utega u trenutku njegova prolaza kroz ravnotežni položaj

$$c=\Delta l\sqrt{\frac{c}{m}}. \qquad (11.10)$$

Nakon prolaza kroz ravnotežni položaj sila u opruzi veća je od težine utega, pa dolazi do usporavanja utega. Uteg se napokon zaustavlja nakon produljenja za iznos Δl_1, nakon čega opet dolazi do gibanja utega prema gore, tj. uteg titra oko ravnotežnog položaja. Veličinu produljenja Δl_1 možemo izračunati iz uvjeta da se cjeloukupni rad težine G pretvorio u potencijalnu energiju deformiranja U. Kako je energija deformiranja opruge $U=c\,\Delta l_1^2/2$ i rad utega $W_G=G\,\Delta l_1$, bit će

$$\frac{c\,\Delta l_1^2}{2}=G\,\Delta l_1.$$

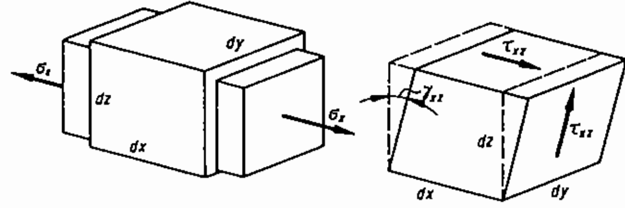
Uzmemo li u obzir da je $G=c\,\Delta l$, dobit ćemo da je $\Delta l_1=2\Delta l$. Vidimo da se pri naglom ispuštanju utega opruga dvaput više produljila nego u slučaju mirnog ili kvazistatičkog opterećenja. Dvaput veće produljenje uvjetuje dvaput veće deformacije, odnosno dvaput veća naprezanja. Prema tome, kad god je to moguće, moramo nastojati da opterećenja mirno djeluju na konstrukciju.

Ako ne bude drugačije naznačeno, smatrat ćemo, u daljnjim izlaganjima, da sve sile djeluju na konstrukciju mirno ili kvazistatički. Također ćemo smatrati da su tijela, odnosno konstrukcije *linearnoelastične*, što znači da sile linearno rastu s porastom pomaka njihovih hvatišta, odnosno da naprezanja linearno ovise o deformacijama, kao i da se tijela nakon rasterećenja potpuno vraćaju u prvobitni oblik i dimenzije.

11.2. Energija deformiranja i gustoća energije deformiranja kod općeg stanja naprezanja

Da bismo što lakše izračunali energiju deformiranja elementa na koji djeluju sve komponente naprezanja, primijenit ćemo metodu superpozicije, tj. posebno ćemo razmatrati energiju deformiranja svake komponente naprezanja, pa ćemo ukupnu energiju dobiti zbrajanjem na *odgovarajući način* pojedinih dijelova energije. Dovoljno je da izračunamo energiju deformiranja jedne normalne i jedne posmične komponente naprezanja. Na slici 11.4a prikazan je element volumena $dV=dx\,dy\,dz$ opterećen normalnom komponentom naprezanja σ_x, a na slici 11.4b isti element

opterećen posmičnom komponentom $\tau_{xz}=\tau_{zx}$. Kako se element nalazi u ravnoteži, pomicanjem elementa kao krutog tijela ne vrši se nikakav rad. Rad se vrši samo pri deformiranju elementa. Prema tome, smijemo smatrati da je jedna strana elementa nepomična.



Slika 11.4. Izračunavanje energije deformiranja zbog komponenata naprezanja σ_x i τ_{xz}

Na element koji je opterećen normalnim naprezanjem σ_x djeluju dvije sile čija veličina iznosi $\sigma_x \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. Te sile se u toku deformiranja razmiču za iznos $\varepsilon_x \mathrm{d}x$. Elementarni rad koji vrše unutrašnje sile iznosi

$$\mathrm{d}W_i=\frac{1}{2}\underbrace{\sigma_x \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}_{\text{sila}}\;\underbrace{\varepsilon_x \mathrm{d}x}_{\text{pomak}}.$$

Indeks i označava da se radi o radu unutrašnjih (internih) sila. Faktor 1/2 javlja se jer sila $\sigma_x \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ raste linearno od nule do svoje konačne vrijednosti, tj. prosječna vrijednost sile jednaka je polovini njene konačne vrijednosti. Kako je $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\mathrm{d}V$, gornji izraz možemo napisati u obliku

$$\mathrm{d}W_i=\mathrm{d}U=\frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x \mathrm{d}V. \qquad (11.11)$$

Energija deformiranja po jedinici volumena jest *gustoća energije deformiranja*, koju označavamo s U_0. Prema tome je, za element opterećen jednoosno naprezanjem σ_x, gustoća energije deformiranja dana izrazom

$$U_0=\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}V}=\frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x. \qquad (11.12)$$

Na element, prema slici 11.4b, djeluju četiri sile: dvije suprotno usmjerene sile $\tau_{zx}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, koje djeluju na gornjoj i donjoj strani elementa, te dvije sile $\tau_{xz}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, koje djeluju na bočnim stranama elementa. Uzmimo da je donja strana elementa nepomična. Tada sila na donjoj strani ne vrši rad. Bočne sile također ne vrše rad jer se točke bočnih strana pomiču horizontalno, tj. okomito na smjer djelovanja sile. Gornja stranica pomiče se za iznos $\gamma_{xz}\mathrm{d}z$, pa rad unutrašnjih sila u tom slučaju iznosi

$$\mathrm{d}W_i=\mathrm{d}U=\frac{1}{2}\tau_{xz}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\gamma_{xz}\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}U=\frac{1}{2}\tau_{xz}\gamma_{xz}\mathrm{d}V. \qquad (11.13)$$

Gustoća energije deformiranja je

$$U_0=\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}V}=\frac{1}{2}\tau_{xz}\gamma_{xz}, \qquad (11.14)$$

Naprezanje σ_x vrši rad samo na deformaciji ε_x, σ_y vrši rad na deformaciji ε_y, τ_{xz} na deformaciji γ_{xz} itd.

U tom pogledu mogu se radovi nezavisno računati, pa je ukupni rad unutrašnjih sila u općem slučaju naprezanja dan izrazom

$$\mathrm{d}W_i=\mathrm{d}U=\frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{zx}\gamma_{zx})\mathrm{d}V, \qquad (11.15)$$

dok je gustoća energije deformiranja

$$U_0=\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}V}=\frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{zx}\gamma_{zx}). \qquad (11.16)$$

Vidimo da je gustoća energije deformiranja istovremeno funkcija šest komponenata naprezanja i šest komponenata deformacije. Kako su komponente naprezanja i komponente deformacije međusobno povezane Hookeovim zakonom, možemo energiju deformiranja izraziti samo kao funkciju naprezanja, odnosno samo kao funkciju deformacija. Ako izraz (6.12) uvrstimo u (11.16) i sredimo, dobit ćemo

$$U_0=\frac{1}{2E}(\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2)-\frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x)+\frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2). \qquad (11.17)$$

Gustoća energije deformiranja očito ne ovisi o izboru koordinatnog sustava, pa ako koordinatni sustav odaberemo tako da se njegove osi podudaraju s glavnim pravcima naprezanja, izraz (11.17) prelazi u jednostavniji oblik

$$U_0=\frac{1}{2E}[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\nu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)]. \qquad (11.18)$$

11.3. Dilatacijska i distorzijska energija

Kad smo u trećem poglavlju govorili o deformiranju tijela, pokazali smo da se deformiranje okoliša svake točke dade rastaviti na istovremenu promjenu oblika i promjenu obujma. Promjenu obujma nazivamo još i *dilatacija*, a promjenu oblika *distorzija*. Energiju deformiranja vezanu uz dilataciju nazivamo još i *dilatacijska* ili *hidrostatička energija deformiranja*, a energiju vezanu uz promjenu oblika *distorzijska energija defomiranja*.

Obujamna deformacija Θ, koja izražava promjenu obujma, vezana je uz duljinske deformacije izrazom (3.15) koji glasi

$$\Theta=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3.$$

Ako u gornji izraz uvrstimo Hookeov zakon (6.12) i sredimo, dobit ćemo

$$\Theta = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) \tag{11.19}$$

odnosno

$$\Theta = \frac{3(1-2\nu)}{E}\sigma_0, \tag{11.20}$$

gdje je

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{3} = \frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3} \tag{11.21}$$

srednje normalno naprezanje. Izraz (11.20) može se napisati u obliku

$$\Theta = \frac{\sigma_0}{K}. \tag{11.22}$$

Iz tog izraza vidimo da je dilatacija ili promjena obujma jednaka nuli ako je srednje normalno naprezanje jednako nuli. S druge strane lako je uočiti da će svaki izotropni materijal koji je opterećen jednoliko u sva tri smjera naprezanjem σ_0 doživjeti samo promjenu obujma, a neće doživjeti promjenu oblika.

Svaki se tenzor naprezanja može rastaviti u dva dijela: sferni i devijatorski. Prvi izaziva samo dilataciju ili promjenu obujma, a drugi samo distorziju ili promjenu oblika. Matrica sfernog dijela tenzora naprezanja $[\sigma_{ij}^0]$ glasi

$$[\sigma_{ij}^0] = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix} \tag{11.23}$$

Matricu devijatorskog tenzora naprezanja $[s_{ij}]$ dobit ćemo ako od matrice tenzora naprezanja $[\sigma_{ij}]$ oduzmemo matricu sfernog dijela $[\sigma_{ij}^0]$, tj.

$$[s_{ij}^0] = [\sigma_{ij}] - [\sigma_{ij}^0]. \tag{11.24}$$

PRIMJER 11.1

Zadana je matrica tenzora naprezanja $[\sigma_{ij}]$.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Odrediti matricu sfernog i devijatorskog tenzora naprezanja.

Srednje normalno naprezanje σ_0 iznosi

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{3} = \frac{-2+8+3}{3} = 3.$$

Sada je

$$[\sigma_{ij}^0] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[s_{ij}] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Kao što se vidi, devijatorski dio tenzora naprezanja ima zbroj dijagonalnih elemenata jednak nuli, pa je i srednje normalno naprezanje σ_0 također jednako nuli. Prema tome, devijatorsko naprezanje ne izaziva promjenu obujma.

Ako u izraz (11.18) uvrstimo komponente sfernog tenzora naprezanja $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma_0$, dobit ćemo gustoću dilatacijske (hidrostatičke) energije deformiranja U_{oh}, tj.

$$U_{oh} = \frac{3(1-2\nu)}{2E}\sigma_0^2 = \frac{\sigma_0^2}{2K} \tag{11.25}$$

$$U_{oh} = \frac{3(1-2\nu)}{2E}\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}\right)^2$$

$$U_{oh} = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2. \tag{11.26}$$

Gustoću distorzijske energije deformiranja možemo dobiti tako da u izraz (11.18) uvrstimo komponente devijatorskog tenzora naprezanja ili tako da od ukupne gustoće energije deformiranja oduzmemo gustoću dilatacijske energije. Primijenit ćemo drugi način, pa je

$$U_{od} = U_0 - U_{oh}$$

$$U_{od} = \frac{1}{2E}[(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)] - \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2.$$

Kad gornji izraz sredimo, dobit ćemo

$$U_{od} = \frac{1+\nu}{6E}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2] \tag{11.27}$$

$$U_{od} = \frac{1}{12G}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2] \tag{11.28}$$

$$U_{od} = \frac{1}{3G}[\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2]. \tag{11.28a}$$

Ovdje su τ_1, τ_2 i τ_3 maksimalna posmična naprezanja koja su dana izrazima

$$\tau_1 = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2},\ \tau_2 = \frac{\sigma_2-\sigma_3}{2},\ \tau_3 = \frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}. \tag{11.29}$$

11.4. Teorija najvećeg normalnog naprezanja

Prema toj teoriji opasnost od loma nastaje kad najveće normalno naprezanje postigne kritičnu vrijednost; od tri glavna naprezanja mjerodavno je ono koje je najveće po apsolutnoj vrijednosti, a ostala dva ne utječu na opasnost od loma. Uvjet čvrstoće tada glasi

$$\sigma_{ekv} = \sigma_{max} \leqslant \sigma_{dop}, \qquad (11.30)$$

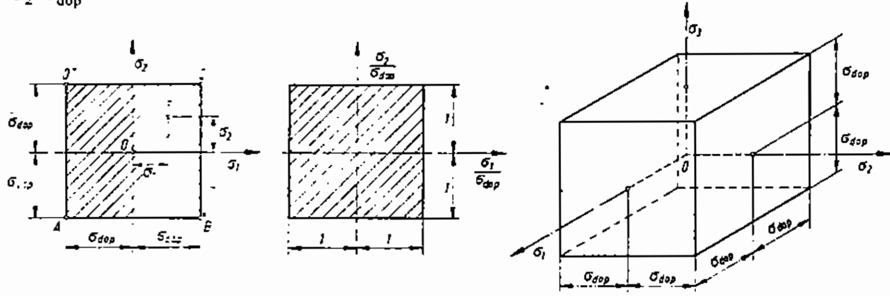
gdje je σ_{ekv} ekvivalentno (efektivno, reducirano) naprezanje, σ_{max} je najveća apsolutna vrijednost glavnih naprezanja, a σ_{dop} dopušteno naprezanje. Dopušteno naprezanje kod krhkih materijala definirano je izrazom $\sigma_{dop} = \sigma_M/S$, a kod duktilnih materijala izrazom $\sigma_{dop} = \sigma_T/S$, gdje je σ_M vlačna čvrstoća materijala, σ_T granica tečenja, a S faktor sigurnosti.

Ako materijal ima različitu vlačnu i tlačnu čvrstoći, uvjet čvrstoće glasi

$$\sigma_1 \leqslant \sigma_{vdop}, \ |\sigma_3| \leqslant \sigma_{tdop}, \ \sigma_3 < 0, \qquad (11.31)$$

gdje je σ_{vdop} dopušteno vlačno naprezanje, a σ_{tdop} dopušteno tlačno naprezanje. Oba uvjeta (11.31) trebaju biti istovremeno ispunjena.

U slučaju dvoosnog stanja naprezanja uvjeti čvrstoće prikazuju se pomoću *krivulja čvrstoće* u koordinatnom sustavu $O\sigma_1\sigma_2$, kako je prikazano na slici 11.5a. Pri tome se ne držimo dogovora da je $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$. Naprezanje u svakoj točki konstrukcije prikazano je jednom točkom T u sustavu $O\sigma_1\sigma_2$. Ako točka T padne unutar kvadrata $ABCD$, nema opasnosti od loma, tj. ispunjen je uvjet čvrstoće. Ako točka T padne na rub kvadrata ili izvan njega, uvjet čvrstoće nije ispunjen. Ponekad se krivulje čvrstoće prikazuju u bezdimenzionalnom koordinatnom sustavu, kako je prikazano na slici 11.5b. Tada se na osi apscisa nanosi σ_1/σ_{dop}, a na osi ordinata σ_2/σ_{dop}.



Slika 11.5. Teorija najvećeg normalnog naprezanja: a) i b) krivulja čvrstoće, c) ploha čvrstoće

U slučaju troosnog naprezanja uvjet čvrstoće je prikazan *površinom čvrstoće*, kao na slici 11.5c. Prema teoriji najvećeg normalnog naprezanja površina čvrstoće jest površina kocke kojoj bridovi imaju duljinu $2\sigma_{dop}$. Središte je kocke u ishodištu koordinatnog sustava.

Teorija najvećeg normalnog naprezanja jedna je od prvih teorija. Nije se pokazala dobrom osim za krhke materijale u području vlaka. Kad su sva tri naprezanja tlačna, ne daje dobre rezultate ni za krhke materijale.

11.5. Teorija najveće duljinske deformacije

Po teoriji najveće duljinske deformacije lom nastupa kada jedna od duljinskih deformacija dostigne kritičnu vrijednost. Kriterij čvrstoće u tom slučaju glasi

$$|\varepsilon|_{max} \leqslant \varepsilon_{dop} = \frac{\sigma_{dop}}{E}. \qquad (11.32)$$

gdje je $|\varepsilon|_{max}$ najveća apsolutna vrijednost duljinske deformacije. Npr. ako je $|\sigma_1| > |\sigma_3|$, bit će

$$|\varepsilon|_{max} = \frac{\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)}{E} \leqslant \frac{\sigma_{dop}}{E} \qquad (11.33)$$

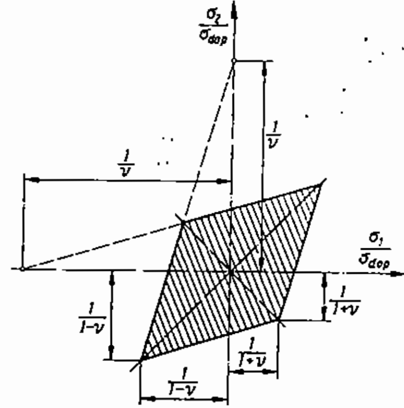
odnosno

$$\sigma_{ekv} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leqslant \sigma_{dop}. \qquad (11.33a)$$

Ako je $|\sigma_3| > |\sigma_1|$, bit će

$$\sigma_{ekv} = |\sigma_3 - \nu(\sigma_2 + \sigma_1)| \leqslant \sigma_{dop}. \qquad (11.33b)$$

Krivulja čvrstoće prema toj teoriji za dvoosno stanje naprezanja prikazana je na slici 11.6. Ta se teorija također nije pokazala dobrom, pa se danas vrlo rijetko upotrebljava.



Slika 11.6. Krivulja čvrstoće po teoriji najveće duljinske deformacije

11.6. Teorija najvećeg posmičnog naprezanja

Prema toj teoriji opasno stanje u materijalu nastaje kad najveće posmično naprezanje dostigne kritičnu vrijednost $\tau_{dop} = \sigma_{dop}/2$. Kako je $\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$, uvjet čvrstoće glasi

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leqslant \tau_{dop} = \frac{\sigma_{dop}}{2}$$

odnosno

$$\sigma_{ekv} = \sigma_1 - \sigma_3 \leqslant \sigma_{dop}. \qquad (11.34)$$

Kod dvoosnog stanja naprezanja jedno glavno naprezanje jednako je nuli. To naprezanje po tradiciji označavamo sa σ_3 iako tada može biti $\sigma_2 < \sigma_3$, što se ne slaže s dogovorom po kome je $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$. Razlikujemo tri slučaja:

a) *Oba glavna naprezanja veća su od nule.* Tada je $\sigma_3 = 0$, pa izraz (11.34) prelazi u

$$\sigma_{ekv} = \sigma_{max} \leqslant \sigma_{dop}, \tag{11.35}$$

gdje je $\sigma_{max} = \sigma_1$ ili σ_2, ovisno o tome koje je naprezanje veće.

b) *Oba glavna naprezanja manja su od nule.* Tada je uvjet čvrstoće također dan izrazom (11.35); međutim, sada je $\sigma_{max} = \sigma_1$ ili σ_2, ovisno o tome koje naprezanje ima veću apsolutnu vrijednost.

c) *Glavna naprezanja imaju suprotan predznak.* U tom slučaju naprezanje σ_2 algebarski je najmanje jer smo usvojili da je $\sigma_3 = 0$. Izraz (11.35) sada prelazi u

$$\sigma_{ekv} = \sigma_1 - \sigma_2 \leqslant \sigma_{dop} \qquad \sigma_1 > 0$$

ili

$$\sigma_{ekv} = \sigma_2 - \sigma_1 \leqslant \sigma_{dop}. \qquad \sigma_1 < 0 \tag{11.36}$$

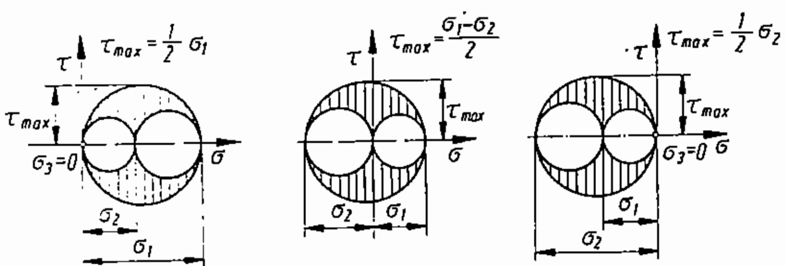
Sva tri slučaja naprezanja prikazana su na slici 11.7. Krivulja loma prikazana je na slici 11.8. U prvom i trećem kvadrantu moraju oba glavna naprezanja po apsolutnoj vrijednosti biti manja od σ_{dop}. U drugom i četvrtom kvadrantu gdje su σ_1 i σ_2 različitog predznaka vrijedi izraz 11.36. Ako je $\sigma_1 > 0$, vrijedi

$$\sigma_2 \geqslant \sigma_1 - \sigma_{dop},$$

tj. naprezanje σ_2 mora biti takvo da radna točka definirana koordinatama (σ_1, σ_2) leži iznad pravca $\sigma_2 = \sigma_1 - \sigma_{dop}$, tj. pravca FA na slici 11.8. Nasuprot tome, ako je $\sigma_1 < 0$, mora biti

$$\sigma_2 \leqslant \sigma_1 + \sigma_{dop},$$

tj. radna točka mora ležati ispod pravca $\sigma_2 = \sigma_1 + \sigma_{dop}$, tj. pravca CD. Svi navedeni uvjeti bit će ispunjeni ako radna točka leži unutar šesterokuta $ABCDEF$ na slici 11.8.

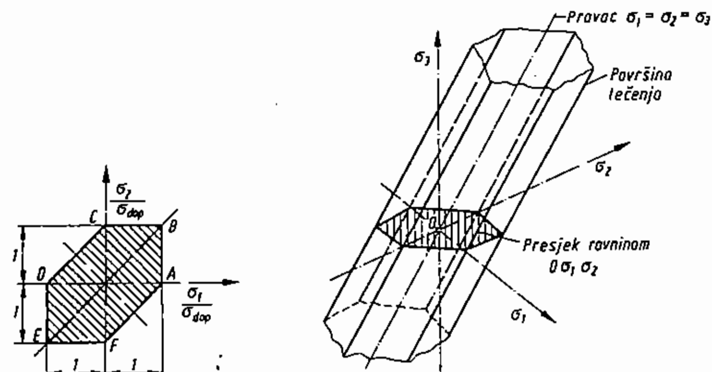


Slika 11.7. Određivanje maksimalnog posmičnog naprezanja

Ako se ne držimo dogovora da je $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$, izraz (11.34) treba pisati u obliku

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \leqslant \sigma_{dop}$$
$$|\sigma_2 - \sigma_3| \leqslant \sigma_{dop} \tag{11.34a}$$
$$|\sigma_3 - \sigma_1| \leqslant \sigma_{dop}.$$

Izraz (11.34a) predstavlja tri para ravnina koje se međusobno sijeku tvoreći pravilnu šesterostranu prizmu prikazanu na slici 11.9. Ta šesterostrana prizma jednako je nagnuta prema koordinatnim osima σ_1, σ_2 i σ_3, tj. pravac $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ jest njena os. Šesterostrana prizma jest površina tečenja prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja. Ako je stanje naprezanja takvo da radna točka $T(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ pada unutar prizme, neće po toj teoriji doći do loma. Nasuprot tome, ako točka pada izvan prizme, uvjet čvrstoće nije ispunjen.



Slika 11.8. Krivulja čvrstoće po teoriji najvećeg posmičnog naprezanja

Slika 11.9. Ploha čvrstoće po teoriji najvećeg posmičnog naprezanja

11.7. Teorija najveće distorzijske energije

Prema toj teoriji opasno stanje materijala nastaje kad gustoća distorzijske energije dostigne kritičnu vrijednost. Uvjet čvrstoće tada glasi

$$U_{od} \leqslant U_{oddop}. \tag{11.37}$$

Gustoća distorzijske energije prema izrazu (11.27) iznosi

$$U_{od} = \frac{1+\nu}{6E}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right].$$

Kada pri jednoosnom naprezanju σ_1 dostigne vrijednost σ_{dop}, dopuštena distorzijska energija iznosi

$$U_{oddop} = \frac{1+\nu}{3E}\sigma_{dop}^2. \tag{11.38}$$

Izraz (11.38) nastaje kad se u (11.27) uvrsti $\sigma_1 = \sigma_{dop}$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Ako sada izraze (11.38) i (11.27) uvrstimo u (11.37) i sredimo, dobit ćemo

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \leqslant 2\sigma_{dop}^2. \tag{11.39}$$

Odavde je

$$\sigma_{ekv} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 + \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leqslant \sigma_{dop}. \tag{11.40}$$

Ta se teorija naziva još i HMH po autorima koji su na njoj radili (M. T. Huber 1904, R. von Mises 1913. i H. Hencky 1925).

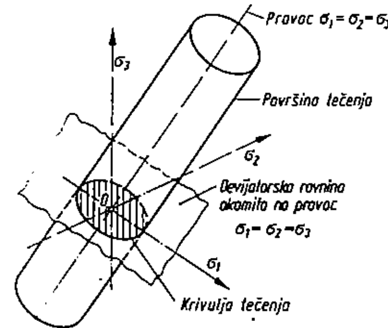
U slučaju dvoosnog stanja naprezanja izraz (11.40) prelazi u

$$\sigma_{ekv} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \leqslant \sigma_{dop}. \tag{11.41}$$

Taj izraz možemo napisati u obliku

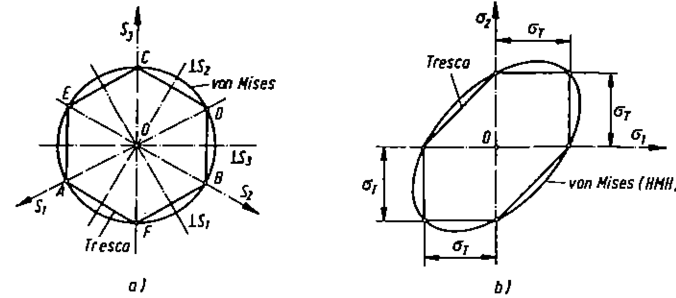
$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{dop}}\right)^2 - \frac{\sigma_1}{\sigma_{dop}} \frac{\sigma_2}{\sigma_{dop}} + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{dop}}\right)^2 \leqslant 1. \tag{11.42}$$

Izraz (11.42) sa znakom jednakosti zapravo je jednadžba elipse, tj. krivulje loma prema teoriji HMH. Dobiveni izraz (11.39) jest jednadžba valjka polumjera $R = \sqrt{2/3}\,\sigma_{dop}$, kojemu je os pravac $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Taj pravac čini jednake kutove s koordinatnim osima σ_1, σ_2 i σ_3. Taj je valjak, prikazan na slici 11.10, ujedno površina loma a ravnina koja prolazi kroz ishodište i stoji okomito na pravac $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ zove se *devijatorska ravnina*. Devijatorska ravnina siječe valjak u



Slika 11.10. Ploha čvrstoće po teoriji distorzijske energije

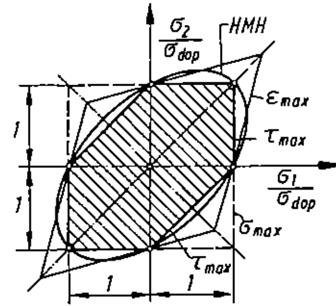
kružnici polumjera $R = \sqrt{2/3}\,\sigma_{dop}$, a šesterostranu prizmu u pravilnom šesterokutu. Kružnica i šesterokut prikazani su na slici 11.11a. Ravnina $O\sigma_1\sigma_2$ siječe valjak u elipsi koja je zadana izrazom (11.42), a šesterostranu prizmu siječe u šesterokutu koji je upisan u elipsu, kako je prikazano na slici 11.11b.



Slika 11.11. Presjeci ploha čvrstoće po teoriji posmičnog naprezanja i po HMH teoriji: a) devijatorskom ravninom, b) ravninom $O\,\sigma_1\,\sigma_2$

11.8. Usporedba teorija čvrstoće

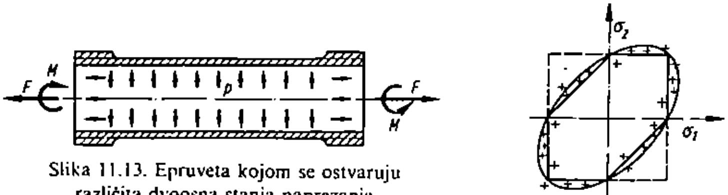
Na slici 11.12 prikazane su krivulje čvrstoće prema svim navedenim teorijama. Područje sigurnosti po teoriji najvećeg posmičnog naprezanja na slici je iscrtano. Kako se vidi, područje sigurnosti prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja nalazi se unutar područja sigurnosti svih ostalih teorija, što znači da teorija najvećeg posmičnog naprezanja za ravninsko naprezanje daje najveću sigurnost. Kako je računanje σ_{ekv} po ovoj teoriji jednostavno, ono se mnogo primjenjuje.



Slika 11.12. Usporedba krivulja čvrstoće po svim teorijama

Teorije čvrstoće provjeravane su eksperimentalno. Na slici 11.13 prikazana je epruveta na kojoj se mogu ostvariti različite kombinacije dvoosnog stanja naprezanja. To je zapravo tanka kružna cijev, koja se može istodobno opteretiti unutrašnjim tlakom p, uzdužnom silom F i momentom M. Ako se mijenjaju nezavisno p, F i M, dobivaju se u stijenci cijevi različite kombinacije naprezanja σ_1 i σ_2. Na slici 11.14 prikazani su rezultati ispitivanja. Rastezljivi ili duktilni materijali dobro slijede teoriju najveće distorzijske energije. Krhki materijali bolje slijede teoriju najvećeg normalnog naprezanja, pa se za rastezljive materijale primjenjuje teorija

posmičnog naprezanja ili teorija distorzijske energije. Za krhke materijale u području vlaka primjenjuje se teorija najvećeg normalnog naprezanja.



Slika 11.13. Epruveta kojom se ostvaruju različita dvoosna stanja naprezanja

Slika 11.14. Eksperimentalna provjera teorija čvrstoće

PRIMJER 11.1

Odrediti gustoću hidrostatičke i distorzijske energije elementa koji se nalazi u čistom smicanju, tj. na koji djeluje komponenta naprezanja $\tau_{xy}=\tau_{yx}=\tau$.

Prema Primjeru 2.2 glavna naprezanja u tom slučaju iznose

$$\sigma_1=\tau,\quad \sigma_2=-\tau,\quad \sigma_3=0.$$

Kad te vrijednosti uvrstimo u izraz (11.26), dobit ćemo vrijednost gustoće dilatacijske energije

$$U_{od}=\frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2=0. \qquad (11.43)$$

To smo mogli i očekivati jer posmična naprezanja izazivaju samo kutne deformacije koje dovode do promjene oblika, a ne do promjene obujma elementa. Ako sada vrijednosti za glavna naprezanja uvrstimo u (11.28), dobit ćemo

$$U_{od}=\frac{1}{12G}\left\{[\tau-(-\tau)]^2+(\tau-0)^2+(-\tau-0)^2\right\}$$

$$U_{od}=\frac{\tau^2}{2G}. \qquad (11.44)$$

PRIMJER 11.2

Odrediti gustoću distorzijske energije elementa na koji djeluje svih devet komponenata naprezanja $\sigma_x, \sigma_y, \ldots \tau_{zx}$.

Kako smo već spomenuli, normalna naprezanja ne vrše rad na kutnim deformacijama, niti posmična naprezanja vrše rad na duljinskim deformacijama. Prema tome, mogu se odvojeno izračunati energija izazvana normalnim naprezanjima i energija izazvana posmičnim naprezanjima.

Kad djeluju samo normalna naprezanja, možemo ih smatrati glavnim naprezanjima, pa gustoća distorzijske energije prema (11.28) iznosi

$$U'_{od}=\frac{1}{12G}\left[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_y)^2\right].$$

Dio distorzijske energije zbog posmičnih naprezanja prema (11.44) iznosi

$$U''_{od}=\frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2).$$

Ukupna distorzijska energija jednaka je zbroju ovih dvaju dijelova, tj.

$$U_{od}=U'_{od}+U''_{od},$$

odnosno

$$U_{od}=\frac{1}{12G}\left[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)\right]. \qquad (11.45)$$

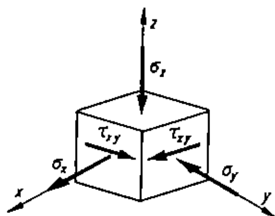
PRIMJER 11.3

Za element na koji djeluju naprezanja prema slici 11.15 odrediti ekvivalentno naprezanje po teoriji:

a) najvećeg normalnog naprezanja
b) najvećeg posmičnog naprezanja
c) najveće distorzijske energije.

Zadano:

$$[\sigma_{ij}]=\begin{bmatrix}10 & 7 & 0\\ 7 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -5\end{bmatrix}\ \text{MPa}$$



Slika 11.15

Glavna naprezanja u ravnini Oxy iznose

$$\sigma'_{1,2}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2\pm\tau_{xy}^2}=(3\pm 11{,}4)\ \text{MPa},$$

pa je

$$\sigma_1=14{,}4\ \text{MPa},\quad \sigma_2=-5\ \text{MPa},\quad \sigma_3=-8{,}4\ \text{MPa}$$

a) $\sigma_{ekv}=\sigma_{max}=14{,}4\ \text{MPa}$

b) $\sigma_{ekv}=\sigma_1-\sigma_3=22{,}8\ \text{MPa}$

c) $\sigma_{ekv}=\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2+\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]}$

$$\sigma_{ekv}=21{,}304\ \text{MPa}.$$

Kako smo mogli i očekivati, teorija τ_{max} i teorija HMH vrlo dobro se slažu; međutim, teorija σ_{max} daje bitno različit rezultat.

12. SLOŽENO OPTEREĆENJE ŠTAPOVA

12.1. Uvodne napomene

Vidjeli smo u petom poglavlju da se pri općem opterećenju štapa unutrašnje sile reduciraju na jednu rezultantu i jedan rezultirajući spreg koji imaju šest komponenata: normalnu silu N, dvije poprečne sile: Q_y i Q_z, moment uvijanja M_t te dva momenta savijanja: M_y i M_z. Do sada smo razmatrali takva opterećenja štapa pri kojima su se unutrašnje sile reducirale na samo jednu komponentu, tj. razmatrali smo: osno opterećenje, uvijanje, savijanje i smicanje. Doduše, kod poprečnog savijanja javlja se istovremeno moment savijanja M_y i poprečna sila Q_z; međutim, u tom slučaju nije bilo problema s provjerom čvrstoće, jer se najveće normalno naprezanje javlja u vanjskim dijelovima presjeka gdje je posmično naprezanje jednako nuli. S druge strane najveće se posmično naprezanje gotovo uvijek javlja u neutralnoj liniji gdje je normalno naprezanje jednako nuli. Razmatrali smo, također, koso savijanje pri kojem se istovremeno javljaju dva momenta savijanja. Međutim, oba ta momenta izazivaju pojavu naprezanja σ_x koje se jednostavno zbraja bez primjene teorija čvrstoće.

U ovom poglavlju pozabavit ćemo se analizom naprezanja i provjerom čvrstoće u štapovima koji su tako opterećeni da se u njihovim poprečnim presjecima javlja istovremeno više komponenata unutrašnjih sila i koje istovremeno uzrokuju kako normalna tako i posmična naprezanja. Općenit pristup rješavanja tih problema takav je da se komponente naprezanja određuju odvojeno od svake komponente unutrašnjih sila i zatim se odgovarajuće komponente zbroje. To smijemo učiniti jer se radi o linearnim problemima i jer se sve komponente tenzora naprezanja odnose na isti koordinatni sustav $Oxyz$. Kad smo jednom odredili sve komponente rezultirajućeg tenzora naprezanje, određujemo glavna naprezanja. Nakon toga određujemo ekvivalentno naprezanje σ_{ekv} koje uspoređujemo s dopuštenim naprezanjem σ_{dop}.

Neke od tih kombinacija često se javljaju u praksi, pa ih nastojimo riješiti općenito, kao npr. uvijanje i savijanje, savijanje i osno opterećenje. Ostali slučajevi rješavaju se općim pristupom.

12.2. Savijanje i osno opterećenje

Na slici 12.1. prikazan je štap koji je istovremeno opterećen momentom savijanja M_y i normalnom silom N. Naprezanje σ_x' koje potječe od savijanja iznosi

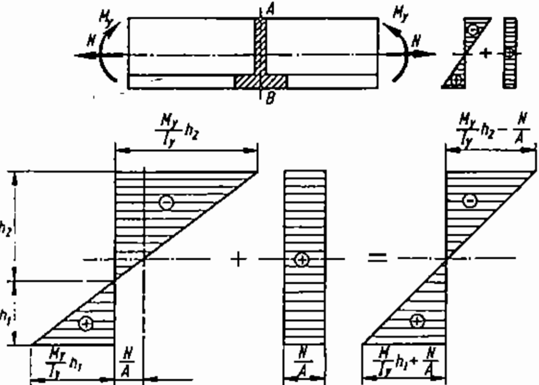
$$\sigma_x' = \frac{M_y}{I_y} z,$$

dok je naprezanje od normalne sile σ_x'' dano izrazom

$$\sigma_x'' = \frac{N}{A}.$$

Ukupno naprezanje je dakle $\sigma_x = \sigma_x' + \sigma_x''$, tj.

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z. \qquad (12.1)$$



Slika 12.1. Raspodjela naprezanja kod istovremenog rastezanja i savijanja štapa

U slučaju istovremenog kosog savijanja i osnog opterećenja naprezanje σ_x dano je izrazom

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y. \qquad (12.2)$$

Kako je štap na slici 12.1 nesimetričan, ne možemo unaprijed odrediti mjesto najvećeg normalnog naprezanja. Ono se može pojaviti u točki A ili točki B presjeka. Naprezanje u točki A je tlačno i iznosi

$$\sigma_{xA} = -\frac{M_y}{I_y} h_2 + \frac{N}{A},$$

dok je naprezanje u točki B vlačno:

$$\sigma_{xB} = \frac{M_y}{I_y} h_1 + \frac{N}{A}.$$

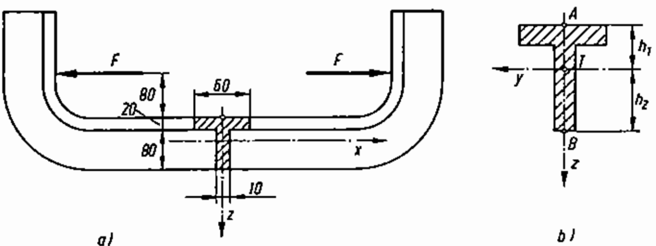
Štap koji je napravljen od materijala koji ima jednaku vlačnu i tlačnu čvrstoću treba tako oblikovati da po mogućnosti bude ispunjen uvjet $\sigma_{xA} = \sigma_{xB}$. Da bi to bilo moguće, poprečni presjek ne smije biti simetričan prema osi y. Štap na slici 12.1. u tom je slučaju dobro oblikovan. Kad je poprečni presjek štapa simetričan, najveće normalno naprezanje dano je izrazom

$$|\sigma_x|_{max} = \left|\frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{W_y}\right|. \qquad (12.3)$$

Predznak ispred drugog člana na desnoj strani biramo tako da se naprezanje od normalne sile N i naprezanje od momenta M_y zbrajaju.

PRIMJER 12.1

Štap savijen u obliku slova U opterećen je s dvije jednake, kolinearne i suprotno usmjerene sile, prema slici 12.2a. Štap je izrađen od sivog lijeva koji ima dopušteno vlačno naprezanje $\sigma_{vdop} = 20$ MPa i dopušteno tlačno naprezanje $\sigma_{tdop} = 60$ MPa. Dimenzije štapa dane su na slici u milimetrima. Odrediti dopušteno opterećenje F_{dop}.



Slika 12.2. Štap opterećen na rastezanje i savijanje

Geometrijske karakteristike presjeka i položaj težišta h_1, površinu A i moment tromosti I_y možemo lako odrediti. Navodimo samo rezultate: $A = 2000\ \text{mm}^2 = 2000\ 10^{-6}\ \text{m}^2$, $h_1 = 0{,}03$ m, $h_2 = 0{,}07$ m, $I_y = 166{,}67\ \text{cm}^2 = 1{,}6667\ 10^{-6}\ \text{m}^4$.

Opasan presjek nalazi se na ravnom dijelu nosača. Komponente unutrašnjih sila u opasnom presjeku iznose

$$N = F$$

$$M_y = F\,(0{,}08 + 0{,}03) = 0{,}11\,F$$

Najveće vlačno naprezanje javlja se u točki A presjeka i iznosi

$$\sigma_{vmax} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} h_1 = \left(\frac{F}{2000} + \frac{0{,}11\,F}{1{,}6667} \cdot 0{,}03\right) \cdot 10^6$$

$$\sigma_{vmax} = 2480\,F.$$

Najveće tlačno naprezanje javlja se u točki B:

$$\sigma_{t\max} = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{I_y} h_2 = \left(\frac{F}{2000} - \frac{0{,}11\,F}{1{,}6667} \cdot 0{,}07 \right) \cdot 10^6$$

$$\sigma_{t\max} = 4120\,F.$$

Uvjet čvrstoće glasi

$$\sigma_{v\max} = 2480\,F \leqslant \sigma_{v\text{dop}} = 20\ 10^6\ \text{Pa}$$

$$\sigma_{t\max} = 4120\,F \leqslant \sigma_{t\text{dop}} = 60\ 10^6\ \text{Pa}.$$

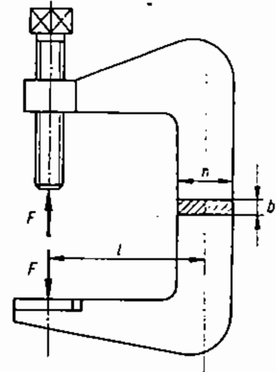
Iz prvog uvjeta možemo dobiti $F = 8064{,}5$ N, a iz drugog uvjeta $F = 14563$ N. Usvajamo manju vrijednost, pa je

$$F_{\text{dop}} = 8064{,}5\ \text{N}$$

sila kojom smijemo opteretiti zadani štap.

PRIMJER 12.2

Odrediti visinu h poprečnog presjeka okvira stege koja je zadana i opterećena prema slici 12.3. Zadano: $F = 20$ kN, $l = 120$ mm, $b = 20$ mm, $\sigma_{\text{dop}} = 120$ MPa.



Slika 12.3. Vrat stege opterećen je istovremeno na rastezanje i savijanje

Maksimalno naprezanje u okviru prema izrazu (12.3) iznosi

$$\sigma_{x\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y}.$$

Kako je $N = F$, $M_y = Fl$, $A = bh$ i $W_y = bh^2/6$, bit će

$$\sigma_{x\max} = \frac{F}{bh} + \frac{6Fl}{bh^2}.$$

Uvjet čvrstoće sada glasi

$$\sigma_{x\max} = \frac{F}{bh} + \frac{6Fl}{bh^2} \leqslant \sigma_{\text{dop}}.$$

Kad u gornji izraz uvrstimo zadane podatke i sredimo ga, dobit ćemo

$$h^2\,\sigma_{\text{dop}} - h\frac{F}{b} - \frac{6Fl}{b} \geqslant 0$$

$$120\,h^2 - 0{,}16667\,h - 0{,}72 \geqslant 0.$$

Rješenjem te kvadratne jednadžbe dobit ćemo

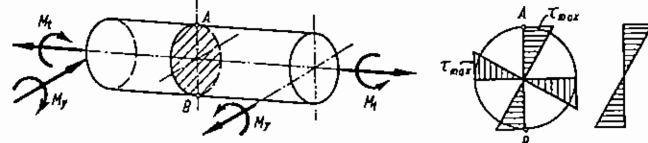
$$h = 0{,}0782\ \text{m} = 78{,}2\ \text{mm}.$$

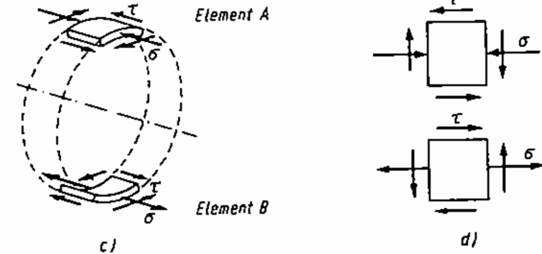
Drugo je rješenje kvadratne jednadžbe negativno i ne odgovara rješenju problema.

12.3. Savijanje i uvijanje okruglih štapova

Ovo se poglavlje odnosi samo na štapove kružnog presjeka (krug ili kružni vijenac) i na materijale koji imaju jednaku vlačnu i tlačnu čvrstoću. Izraze koje ćemo izvesti u ovom poglavlju smiju se upotrijebiti samo ako su ispunjena oba uvjeta.

Na slici 12.4a prikazan je element štapa koji je istovremeno opterećen na uvijanje momentom uvijanja M_t i na savijanje momentom savijanja M_y. Raspored naprezanja po poprečnom presjeku prikazan je na slici 12.4b. Najveće posmično





Slika 12.4. Element štapa kružnog presjeka koji je opterećen na savijanje i uvijanje

naprezanje $\tau_{\max}$ djeluje po čitavu obodu. Najveće normalno naprezanje javlja se u točkama A i B na obodu poprečnog presjeka, pa su te točke kritične. Elementi oko točaka A i B prikazani su na slici 12.4c u kosoj projekciji, a na slici 12.4d u normalnoj projekciji. Glavna naprezanja u točki A iznose

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\left[-\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right], \qquad \sigma_2 = \frac{1}{2}\left[-\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right], \qquad (12.4a)$$

a u točki B

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\left[\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right], \qquad \sigma_2 = \frac{1}{2}\left[\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right], \qquad (12.4b)$$

gdje su σ i τ apsolutne vrijednosti najvećeg normalnog i posmičnog naprezanja. Te su vrijednosti dane izrazima

$$\sigma = \frac{|M_y|}{W_y}, \qquad \tau = \frac{|M_t|}{W_p}. \tag{12.5}$$

Pri daljnjem izvođenju nećemo posebno označavati da su M_y i M_t apsolutne vrijednosti, ali ćemo to imati na umu.

Kako materijal ima jednaku vlačnu i tlačnu čvrstoću, svejedno je provjeravamo li čvrstoću štapa u točki A ili u točki B. Provjeru čvrstoće provest ćemo u točki B pomoću sve četiri navedene teorije čvrstoće. Za presjek u obliku punog kruga vrijedi

$$W_y = \frac{\pi d^3}{32}, \qquad W_p = \frac{\pi d^3}{16},$$

a za kružni vijenac

$$W_y = \frac{\pi d_v^3}{32}(1 - k^4), \qquad W_p = \frac{\pi d_v^3}{16}(1 - k^4),$$

gdje je $k = d_u/d_v$, a d_u i d_v su unutrašnji i vanjski promjer kružnog vijenca. U oba slučaja, dakle, vrijedi

$$W_p = 2\,W_y,$$

pa je sada

$$\sigma = \frac{M_y}{W_y}, \qquad \tau = \frac{M_t}{2\,W_y}. \tag{12.6}$$

Teorija najvećeg normalnog naprezanja. Ekvivalentno naprezanje po toj teoriji iznosi

$$\sigma_{ekv} = \sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}).$$

Kad uvrstimo (12.6) u gornji izraz i sredimo, dobit ćemo

$$\sigma_{ekv} = \frac{1}{2\,W_y}(M_y + \sqrt{M_y^2 + M_t^2}) = \frac{M_{ekv}}{W_y}, \tag{12.7}$$

gdje je

$$M_{ekv} = \frac{1}{2}(M_y + \sqrt{M_y^2 + M_t^2}) \tag{12.8}$$

ekvivalentni moment savijanja. Kriterij čvrstoće sada glasi

$$\sigma_{ekv} = \frac{M_{ekv}}{W_y} \leqslant \sigma_{dop}. \tag{12.9}$$

Teorija najveće duljinske deformacije. Prema toj teoriji vrijedi

$$\sigma_{ekv} = \sigma_1 - \nu\sigma_2.$$

Kad u gornji izraz uvrstimo (12.6) i sredimo, dobit ćemo

$$\sigma_{ekv} = \frac{1}{W_y}\left(\frac{1-\nu}{2}M_y + \frac{1+\nu}{2}\sqrt{M_y^2 + M_t^2}\right). \tag{12.10}$$

Ako se uzme da je $\nu \approx 0{,}3$, bit će

$$\sigma_{ekv} = \frac{1}{W_y}(0{,}35\,M_y + 0{,}65\sqrt{M_y^2 + M_t^2}). \tag{12.11}$$

Ekvivalentni moment savijanja iznosi

$$M_{ekv} = 0{,}35\,M_y + 0{,}65\sqrt{M_y^2 + M_t^2}. \tag{12.12}$$

Teorija najvećeg posmičnog naprezanja. Kako su glavna naprezanja σ_1 i σ_2 u tom slučaju suprotnog predznaka, ekvivalentno naprezanje dano je izrazom

$$\sigma_{ekv} = \sigma_1 - \sigma_2. \tag{12.13}$$

Uvrštavanjem izraza (12.4b) u (12.13) dobit ćemo nakon sređivanja

$$\sigma_{ekv} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \tag{12.14}$$

Ako sada izraz (12.6) uvrstimo u (12.14), bit će

$$\sigma_{ekv} = \frac{1}{W_y}\sqrt{M_y^2 + M_t^2}. \tag{12.15}$$

Uvjet čvrstoće sada glasi

$$\sigma_{ekv} = \frac{M_{ekv}}{W_y} \leqslant \sigma_{dop},$$

gdje je

$$M_{ekv} = \sqrt{M_y^2 + M_t^2}. \tag{12.16}$$

Ako se savijanje provodi istovremeno u dvije ravnine, onda je moment savijanja dan izrazom $M_s^2 = M_y^2 + M_z^2$, pa ekvivalentni moment savijanja iznosi

$$M_{ekv} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + M_t^2}. \tag{12.16a}$$

Teorija najveće distorzijske energije. Prema toj teoriji ekvivalentno naprezanje iznosi

$$\sigma_{ekv} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}.$$

Ako se (12.4b) uvrsti u gornji izraz, dobit će se

$$\sigma_{ekv} = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma + \sqrt{A})^2 + (\sigma - \sqrt{A})^2 + (\sigma + \sqrt{A})(\sigma - \sqrt{A})},$$

gdje je $A = \sigma^2 + 4\tau^2$. Kad gornji izraz sredimo, bit će

$$\sigma_{ekv} = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 3\,A^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 3\,(\sigma^2 + 4\tau^2)}$$

$$\sigma_{ekv} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}. \tag{12.17}$$

Nakon uvrštavanja (12.6) u gornji izraz dobivamo

$$\sigma_{ekv}=\frac{1}{W_y}\sqrt{M_y^2+0{,}75\,M_t^2}, \tag{12.18}$$

odnosno

$$M_{ekv}=\sqrt{M_y^2+0{,}75\,M_t^2}. \tag{12.19}$$

Ako je riječ o savijanju u dvije ravnine, onda izraz za ekvivalentni moment savijanja glasi

$$M_{ekv}=\sqrt{M_y^2+M_z^2+0{,}75\,M_t^2} \tag{12.19a}$$

Treba imati na umu da se u svim izrazima za M_{ekv} uvrštavaju apsolutne vrijednosti M_y i M_t.

12.4. Opći slučaj složenih opterećenja

Vrlo često složeno opterećenje dovodi do ravninskog stanja naprezanja. Kad su sve četiri komponente naprezanja σ_x, σ_y, $\tau_{xy}=\tau_{yx}$ različite od nule, glavna su naprezanja dana izrazom

$$\sigma_{1,2}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2},$$

što se može napisati u obliku

$$\sigma_1=\frac{1}{2}(A+\sqrt{B}),\quad \sigma_2=\frac{1}{2}(A-\sqrt{B}), \tag{12.20}$$

gdje je

$$A=\sigma_x+\sigma_y,\quad B=(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2. \tag{12.21}$$

Teorija najvećeg posmičnog naprezanja. Ako σ_x i σ_y nisu istog predznaka, ili ako je

$$\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2<\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2, \tag{12.22}$$

onda σ_1 i σ_2 imaju različit predznak. Tada je

$$\sigma_{ekv}=\sigma_1-\sigma_2.$$

Kad izraze (12.20) i (12.21) uvrstimo u gornji izraz i sredimo, dobit ćemo

$$\sigma_{ekv}=\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}}. \tag{12.23}$$

Ako su σ_x i σ_y istog predznaka i uvjet (12.22) nije ispunjen, onda su i naprezanja σ_1 i σ_2 istog predznaka, pa je $\sigma_{ekv}=\sigma_1$ ili σ_2, tj.

$$\sigma_{ekv}=\left|\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}\right|. \tag{12.24}$$

U gornjem se izrazu uzima pozitivan predznak ako su σ_x i σ_y veći od nule, odnosno negativan predznak ako su σ_x i σ_y manji od nule.

Teorija najveće distorzijske energije. Uvrstimo izraze (12.20), (12.21) i $\sigma_3=0$ u (11.40), pa ćemo dobiti

$$\sigma_{ekv}=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+3B}$$

odnosno

$$\sigma_{ekv}=\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma_x\sigma_y+3\tau_{xy}^2}. \tag{12.25}$$

Za opće troosno stanje naprezanja navest ćemo samo rezultat, tj.

$$\sigma_{ekv}=\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)\right]} \tag{12.26}$$

PRIMJER 12.3

Odrediti promjer vratila d remenskog prenosa zadanog prema slici 12.5. Preko srednje remenice dovodi se snaga P_2, a preko krajnjih remenica odvodi snaga P_1 i P_3. Zadano:

$D_1=2R_1=320$ mm $\quad P_1=30$ kW $\quad \omega=60$ rad/s

$D_2=2R_3=400$ mm $\quad P_2=70$ kW $\quad \sigma_{dop}=50$ MPa.

$D_3=2R_3=440$ mm $\quad P_3=40$ kW

Ostali podaci zadani su na slici. Proračun provesti po teoriji najvećeg posmičnog naprezanja.

Remenice prenose ove zakretne momente:

$$M_1=\frac{P_1}{\omega}=\frac{30\cdot10^3}{60}=500\ \text{Nm}$$

$$M_2=\frac{P_2}{\omega}=1166{,}7\ \text{Nm}$$

$$M_3=\frac{P_3}{\omega}=666{,}7\ \text{Nm}.$$

Sile u remenju iznose:

$$F_1=\frac{2M_1}{D_1}=3125\ \text{N},\qquad 3F_1=9375\ \text{N}$$

$$F_2=\frac{2M_2}{D_2}=5833{,}35\ \text{N},\qquad 3F_2=17500\ \text{N}$$

$$F_3=\frac{2M_3}{D_3}=3030\ \text{N}.\qquad 3F_3=9090\ \text{N}.$$

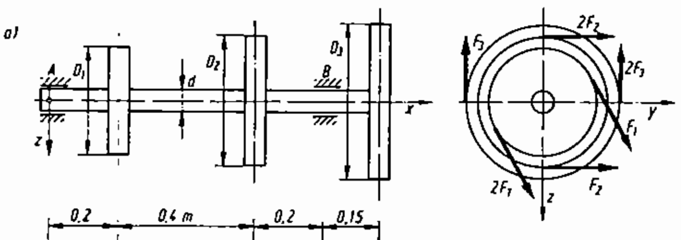
U desnom stupcu navedene su sile koje remenice prenose na osovinu. Osovina je istovremeno opterećena na uvijanje spregovima M_1, M_2 i M_3, na savijanje u vertikalnoj ravnini Oxz silama $3F_1\cdot\cos 30°=8119$ N i $3F_3=9090$ N, te na savijanje u horizontalnoj ravnini Oxy silama $3F_1\cdot\sin 30°=4688$ N i $3F_2=17500$ N. Postupak

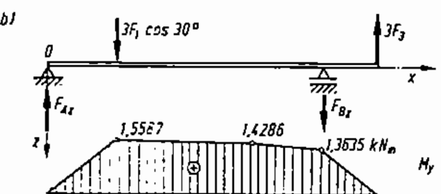
određivanja reakcija i momenata savijanja nećemo posebno opisivati. Rezultati su prikazani na slici 12.5. Reakcije po apsolutnoj vrijednosti iznose:

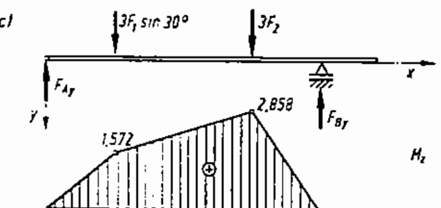
$$F_{Ay}=7{,}876\ \text{kN} \qquad F_{By}=14{,}292\ \text{kN}$$

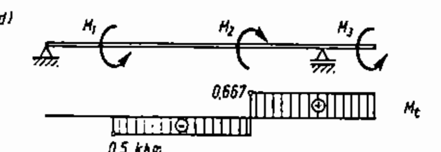
$$F_{Az}=7{,}793\ \text{kN} \qquad F_{Bz}=8{,}765\ \text{kN}.$$

Smjer djelovanja reakcija prikazan je na slici 12.5.









Slika 12.5. Vratilo remenskog prenosa opterećeno na savijanje i uvijanje

Očito se kritični presjek nalazi ispod srednje remenice jer ovdje djeluje najveći moment savijanja i najveći moment uvijanja. Ekvivalentni moment savijanja prema (12.16a) iznosi

$$M_{ekv}=\sqrt{M_y^2+M_z^2+M_t^2}$$

$$M_{ekv}=\sqrt{2859{,}4^2+1428{,}6^2+666{,}7^2}\ \text{Nm}=3265{,}2\ \text{Nm}.$$

Maksimalno ekvivalentno naprezanje sada je dano izrazom

$$\sigma_{ekv}=\frac{M_{ekv}}{W_y}\leqslant\sigma_{dop}.$$

Odavde je

$$W_y=\frac{\pi d^3}{32}\geqslant\frac{M_{ekv}}{\sigma_{dop}}$$

odnosno

$$d\geqslant\sqrt[3]{\frac{32\,M_{ekv}}{\pi\,\sigma_{dop}}}$$

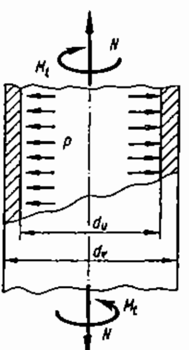
$$d\geqslant\sqrt[3]{\frac{32\cdot 3265{,}2}{50\cdot 10^6}}\ \text{m}=8{,}72\cdot 10^{-2}\ \text{m}$$

Može se usvojiti standardni promjer $d=90$ mm.

PRIMJER 12.4

Cijev prikazana na slici 12.6 opterećena je na uvijanje momentom M_t, unutrašnjim tlakom p te osnom silom N. Provjeriti čvrstoću cijevi ako je zadano:

$p=8$ MPa	$M_t=30$ kNm
$N=150$ kN	$\sigma_{dop}=140$ MPa
$d_v=20$ cm	$h=1$ cm.



Slika 12.6. Element cijevi opterećene unutrašnjim tlakom p, momentom uvijanja M_t i osnom silom N

Napomena: Slične cijevi koriste se pri bušenju dubokih bušotina, npr. pri istraživanju nafte.

Geometrijske karakteristike poprečnog presjeka cijevi jesu:

$$W_p=\frac{\pi d_v^3}{16}\left[1-\left(\frac{d_u}{d_v}\right)^4\right]=1030{,}6\ \text{cm}^3=1030{,}6\cdot 10^{-6}\ \text{m}^4$$

$$A=\frac{\pi}{4}(d_v^2-d_u^2)=59{,}69\ \text{cm}^2=5969\cdot 10^{-6}\ \text{m}^4.$$

Naprezanje zbog normalne sile iznosi

$$\sigma_x=\frac{N}{A}=25{,}13\ \text{MPa}.$$

Cirkularno normalno naprezanje $\sigma_y = \sigma_\varphi$ odredit ćemo slično kao u primjeru 6.1, tj. to naprezanje iznosi

$$\sigma_y = \frac{pR}{h} = \frac{8\cdot 10^6\cdot 0{,}09}{0{,}01}\,10^6\,\mathrm{Pa}$$

$$\sigma_y = 72\cdot 10^6\,\mathrm{Pa} = 72\,\mathrm{MPa}.$$

Ovdje je $R = d_u/2 = (d_v - 2h)/2 = 9$ cm. Moment uvijanja izaziva posmično naprezanje τ_{xy}, koje iznosi

$$\tau_{xy} = \frac{M_t}{W_p} = 29{,}11\,\mathrm{MPa}.$$

Ekvivalentno naprezanje odredit ćemo pomoću izraza (12.25), tj.

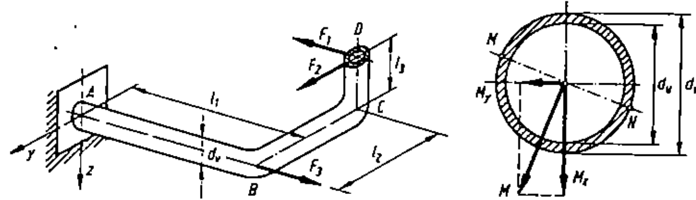
$$\sigma_{ekv} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{ekv} = \sqrt{25{,}13^2 + 72^2 - 25{,}13\cdot 72 + 3\cdot 29{,}11^2}\,\mathrm{MPa}$$

$$\sigma_{ekv} = 80{,}92\,\mathrm{MPa}.$$

PRIMJER 12.5

Cijev vanjskog promjera d_v i unutrašnjeg promjera d_u oblikovana je i konzolno učvršćena prema slici 12.7. Opterećena je silama $F_1 = 3F$, $F_2 = 4F$ i $F_3 = 10F$. Odrediti dopušteno opterećenje ako je zadano: $\sigma_{dop} = 140$ MPa, $l_1 = 1$ m, $l_2 = 0{,}5$ m, $l_3 = 0{,}2$ m, $d_v = 10$ cm, $d_u = 9$ cm.



Slika 12.7. Konzola cijevna

Očito je da će najveći moment savijanja biti na mjestu uklještenja, tj. u presjeku A. Kako su ovdje normalna sila N i moment uvijanja također maksimalni, zaključujemo da je presjek A opasan presjek, pa ćemo u njemu provjeriti čvrstoću.

Komponente unutrašnjih sila na mjestu uklještenja iznose

$$N = F_3 - F_1 = 7F$$

$$M_x = M_t = F_2 l_3 = 4F\cdot 0{,}2 = 0{,}8F$$

$$M_y = F_1 l_3 = 0{,}6F$$

$$M_z = F_2 l_1 - F_1 l_2 = 4F\cdot 1 - 3F\cdot 0{,}5 = 2{,}5F$$

$$M_s = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = 2{,}571F.$$

Maksimalna naprezanja zbog savijanja javljaju se u točkama M i N. Točke M i N nalaze se na pravcu kroz središte cijevi, koji čini s osi y kut α. Taj je kut definiran izrazom

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{M_y}{M_z} = \frac{0{,}6}{2{,}5} = 0{,}24,$$

pa je $\alpha = 13{,}5°$.

Karakteristike poprečnog presjeka iznose:

$$W_p = \frac{\pi d_v^3}{16}[1 - k^4] = 67{,}525\,\mathrm{cm}^3 = 67{,}525\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^3$$

$$W_y = \frac{1}{2}W_p = 33{,}762\;10^{-6}\,\mathrm{m}^3$$

$$A = \frac{\pi d_v^2}{4}[1 - k^2] = 14{,}9233\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2,$$

gdje je $k = d_u/d_v = 0{,}9$.

Naprezanja zbog normalne sile N i momenta uvijanja M_t jednaka su po čitavu obodu. Kako su normalna naprezanja od N i M_s u točki N istog predznaka, a u točki M suprotnog predznaka, najveće ekvivalentno naprezanje djelovat će u točki N. Normalno naprezanje u točki N iznosi

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_s}{W_y} = (4690{,}75 + 76150{,}7)F$$

$$\sigma_x = 80841{,}5F.$$

Posmično naprezanje u istoj točki jest

$$\tau = \frac{M_t}{W_p} = 11847{,}5F.$$

a) Teorija najvećeg posmičnog naprezanja

Prema (12.14) ekvivalentno naprezanje iznosi

$$\sigma_{ekv} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 85202F \leqslant \sigma_{dop}.$$

Odavde je

$$F = \frac{\sigma_{dop}}{85202} = \frac{140\cdot 10^6}{85202} = 1643\,\mathrm{N},$$

pa je

$$F_{1dop} = 4929{,}5\,\mathrm{N} \qquad F_{2dop} = 6572{,}6\,\mathrm{kN} \qquad F_{3dop} = 16431\,\mathrm{N}.$$

b) Teorija najveće distrozijske energije

Prema izrazu (12.17) vrijedi

$$\sigma_{ekv}=\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}=83404{,}5\,F\leqslant\sigma_{dop}$$

$$F=\frac{\sigma_{dop}}{83404{,}5}=\frac{140\cdot10^6}{83404{,}5}\ \mathrm{N}$$

$$F=1678{,}6\ \mathrm{N},$$

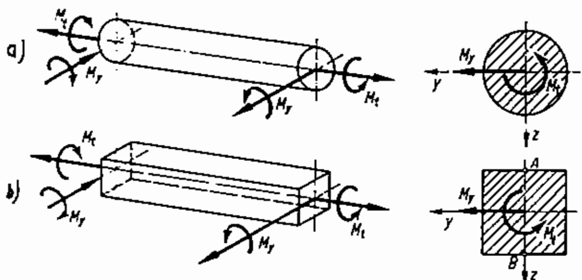
pa je

$$F_{1dop}=5035{,}8\ \mathrm{N}\qquad F_{2dop}=6714{,}4\ \mathrm{N}\qquad F_{3dop}=16786\ \mathrm{N}.$$

Jasno je da sve tri sile moraju djelovati istovremeno jer je pod tim uvjetom i provedena provjera čvrstoće.

PRIMJER 12.6

Poznato nam je da je kvadratni presjek povoljniji pri savijanju od okruglog. Nasuprot tome kružni je presjek štapa povoljniji od kvadratnog pri uvijanju. Pri kojem će omjeru M_y/M_t oba presjeka biti jednako povoljna ako su štapovi opterećeni istovremeno na savijanje i uvijanje prema slici 12.8.



Slika 12.8. Usporedba čvrstoće štapova kružnog i kvadratnog presjeka opterećenih na savijanje i uvijanje

a) Teorija najvećeg posmičnog naprezanja

Maksimalno ekvivalentno naprezanje pri istovremenom uvijanju i savijanju okruglog štapa iznosi

$$\sigma_{ekv}=\frac{M_{ekv}}{W_y}=\frac{32}{d^3\pi}\sqrt{M_y^2+M_t^2}. \tag{a}$$

Kod kvadratnog presjeka najveće posmično naprezanje javlja se u sredini stranica (točke A, B, C i D na slici 12.8b) i ono prema izrazu (8.34) iznosi

$$\tau_{max}=\frac{M_t}{0{,}208\,a^3}. \tag{b}$$

$$\sigma_{max}=\frac{M_y}{W_y}=\frac{6M_y}{a^3}. \tag{c}$$

Prema tome, najveće ekvivalentno naprezanje bit će u točkama A i C i iznosi

$$\sigma_{ekv}=\sqrt{\sigma_{max}^2+4\tau_{max}^2}$$

odnosno

$$\sigma_{ekv}=\frac{6}{a^3}\sqrt{M_y^2+2{,}568\,M_t^2}. \tag{d}$$

Da bi se ispunio postavljeni uvjet, trebamo oba ekvivalentna naprezanja izjednačiti, pa ćemo dobiti

$$\frac{6}{a^3}\sqrt{M_y^2+2{,}568\,M_t^2}=\frac{32}{d^3}\sqrt{M_y^2+M_t^2}. \tag{e}$$

Površine kvadrata i kruga moraju također biti jednake, pa je

$$a=\pi d^2/4$$

odnosno

$$a=\frac{\sqrt{\pi}}{2}d. \tag{f}$$

Kad uvrtimo izraz (f) u (e) i sredimo, dobit ćemo

$$\frac{48\,M_y}{\pi\sqrt{\pi}\,d^3}\sqrt{1+2{,}568\,k^2}=\frac{32\,M_y}{\pi d^3}\sqrt{1+k^2}, \tag{g}$$

gdje je $k=M_t/M_y$. Daljnjim sređivanjem tog izraza dobit ćemo

$$1+2{,}568\,k^2=\frac{4\pi}{9}(1+k^2).$$

Odavde lako možemo izračunati da je $k=0{,}582$, odnosno, $M_y/M_t=1{,}72$.

b) Teorija najveće distorzijske energije

Prema toj teoriji za kružni presjek vrijedi

$$\sigma_{ekv}=\frac{32}{\pi d^3}\sqrt{M_y^2+0{,}75\,M_t^2}.$$

Za kvadratni presjek jest

$$\sigma_{ekv}=\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}$$

odnosno

$$\sigma_{ekv}=\frac{6}{a^3}\sqrt{M_y^2+1{,}926\,M_t^2}$$

$$\sigma_{ekv}=\frac{48}{\pi\sqrt{\pi}\,d^3}\sqrt{M_y^2+1{,}926\,M_t^2}.$$

Izjednačavanjem oba izraza i sređivanjem dobit ćemo $M_y/M_t=1{,}489$.

13. IZVIJANJE, GUBITAK ELASTIČNE STABILNOSTI

13.1. Stabilna, labilna i indiferentna ravnoteža

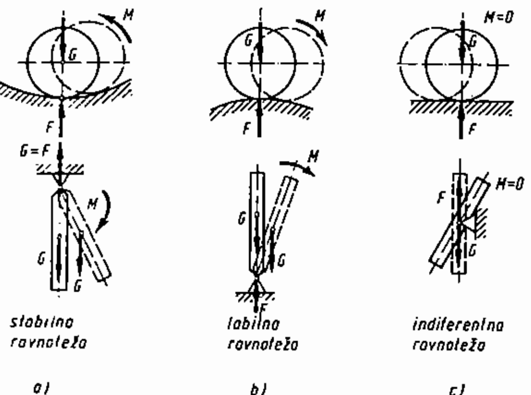
U uvodnom poglavlju spomenuli smo da je zadatak nauke o čvrstoći da proučava čvrstoću, krutost i stabilnost sastavnih dijelova konstrukcija i samih konstrukcija. Do sada smo proučavali probleme naprezanja i deformacija štapova pri rastezanju, sabijanju, uvijanju, savijanju i smicanju i u vezi s tim probleme čvrstoće i krutosti štapova. U ovom poglavlju upoznat ćemo se s problemima elastične stabilnosti. Pojam stabilnosti ravnoteže objasnit ćemo prvo na primjeru krutog tijela. Zamislimo kruto tijelo koje je zauzelo ravnotežni položaj pod djelovanjem opterećenja i reakcija veza. Ako to tijelo neznatno udaljimo od stanja ravnoteže i zatim prepustimo samo sebi, moguća su tri slučaja:

1. Tijelo se vraća u prvobitni ravnotežni položaj.
2. Tijelo se sve više udaljava od prvobitnog ravnotežnog položaja (dok se eventualno ne umiri u novom ravnotežnom položaju).
3. Tijelo ostaje u ravnoteži u bilo kojem novom položaju koji je blizak prvobitnom ravnotežnom položaju.

U prvom slučaju tijelo je u *stabilnoj* ravnoteži, u drugom je u *labilnoj* ravnoteži, a u trećem je slučaju u *indiferentnoj* ravnoteži.

Na slici 13.1a prikazani su štap i kugla koji se nalaze u stabilnoj ravnoteži. Pri malom udaljavanju tijela od stanja ravnoteže težina G i reakcija F čine spreg M koji nastoji vratiti tijelo u prvobitni položaj. Na slici 13.1b prikazani su štap i kugla u labilnoj ravnoteži. U tom slučaju spreg koji čine težina G i reakcija F teži da udalji tijelo od stanja ravnoteže. Kugla i štap na slici 13.1c nalaze se u indiferentnoj ravnoteži. Težina G i reakcija F, u tom slučaju, uvijek su kolinearne, pa tijelo ostaje u ravnoteži u bilo kojem položaju.

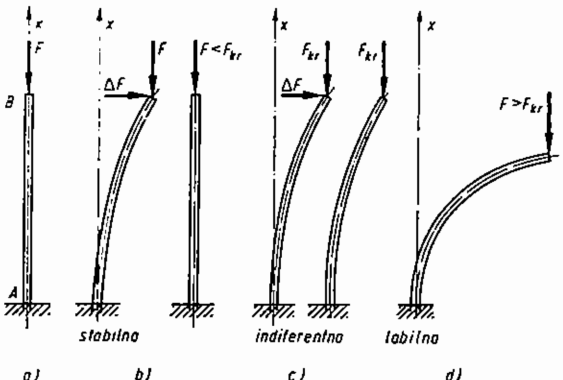
Sličan problem stabilnosti ravnoteže postoji i kod elastičnog odnosno deformabilnog tijela. Pod opterećenjem elastično se tijelo deformira dok ne poprimi ravnotežni deformirani oblik. Deformirani oblik tijela može biti stabilan, labilan ili indiferentan, što ćemo objasniti pomoću slike 13.2. Na slici 13.2a prikazan je štap koji je na donjem kraju uklješten, a na gornjem opterećen silom F. Zamišljamo da



Slika 13.1. Stabilna, labilna i indiferentna ravnoteža krutog tijela

je štap idealno ravan, idealno centrično opterećen i izrađen od homogenog materijala. U tom slučaju štap će se pod djelovanjem sile F skratiti, ali će zadržati ravan oblik. Zamislimo, sada, da na štap djeluje mala bočna sila ΔF. Moguća su opet tri slučaja ponašanja štapa:

1. Pod djelovanjem sile ΔF štap se izvije ustranu. Nakon uklanjanja sile ΔF štap se ponovo vraća u ravan oblik, kako je prikazano na slici 13.2b. U tom slučaju govorimo o stabilnoj elastičnoj ravnoteži. Taj slučaj nastupa kada je sila F malena.



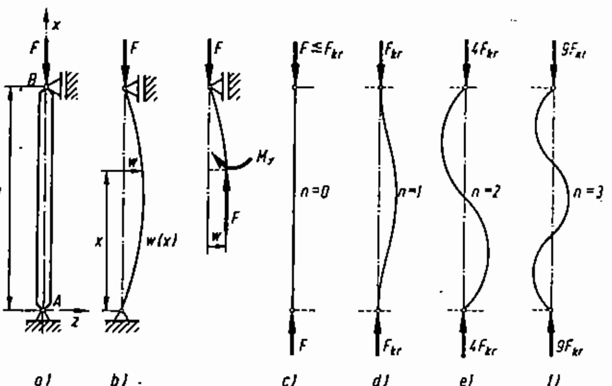
Slika 13.2. Stabilna, labilna i indiferentna ravnoteža elastičnog štapa

2. Štap se izvija ustranu i nakon uklanjanja bočne sile zadržava izvijen oblik (indiferentna elastična ravnoteža). Taj slučaj nastupa pri tzv. kritičnoj sili F_{kr}, a prikazan je na slici 13.2c.
3. Pri najmanjoj bočnoj sili štap se jako izvija ustranu (sl. 13.2d), pri čemu može doći do loma štapa (nestabilna elastična ravnoteža). Taj slučaj nastupa kad je $F > F_{kr}$.

U stvarnosti štap nije nikada idealno ravan i homogen, a niti je idealno centrično opterećen. Već i najmanje odstupanje sile od centričnog pravca ili pojava nehomogenog materijala izaziva isti učinak kao i mala bočna sila ΔF. Prema tome uvijek dolazi do izvijanja kada tlačna sila F pređe kritičnu vrijednost. Naš glavni zadatak u ovom poglavlju bit će određivanje kritične sile F_{kr} za razne oblike i dimenzije štapova izrađenih od raznih materijala.

13.2. Izvijanje štapa u elastičnom području, Eulerova kritična sila

Da bismo odredili kritičnu silu pri kojoj počinje izvijanje štapa, razmotrit ćemo štap na slici 13.3a. Štap je na oba kraja vezan pomoću nepomičnog zgloba i centrično opterećen silom F. Dok je sila manja od kritične sile izvijanja, tj. dok je $F < F_{kr}$, štap ostaje ravan. Čim sila dostigne kritičnu vrijednost, počinje bočno izvijanje, a uzdužna os štapa prelazi u elastičnu liniju $w = w(x)$, kako je prikazano na slici 13.3b.



Slika 13.3. Osnovna forma i više forme izvijanja štapa

U tom se slučaju u presjeku x pojavljuje moment savijanja $M_y = F w$. Diferencijalna jednadžba elastične linije glasi

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_y}{EI_y} = -\frac{F}{EI_y} w$$

odnosno

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha^2 w = 0, \tag{13.1}$$

gdje je

$$\alpha^2 = \frac{F}{EI_y}. \tag{13.2}$$

Rješenje diferencijalne jednadžbe (13.1) jest funkcija $w = w(x)$ koja identično zadovoljava tu jednadžbu. Bilo koja funkcija čija druga derivacija ima isti oblik kao i sama funkcija, ali sa suprotnim predznakom, može poslužiti kao jedno rješenje.

Takve su funkcije $\sin \alpha x$ i $\cos \alpha x$. Kako su funkcije $\sin \alpha x$ i $\cos \alpha x$ nezavisne, opće rješenje diferencijalne jednadžbe glasi

$$w = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x. \tag{13.3}$$

Ovdje su C_1 i C_2 konstantne integracije koje ćemo odrediti iz rubnih uvjeta. Imamo dvije konstante integracije jer je diferencijalna jednadžba drugog reda. Štap je učvršćen tako da su pomaci oba kraja jednaki nuli, pa rubni uvjeti glase:

$$w(0) = 0 \qquad \text{i} \qquad w(l) = 0.$$

Primjenom prvog uvjeta dobit ćemo

$$0 = C_1 \sin \alpha \cdot 0 + C_2 \cos \alpha \cdot 0.$$

odnosno $C_2 = 0$. Sada možemo pomoću drugog uvjeta dobiti

$$0 = C_1 \sin \alpha l.$$

Taj će izraz biti zadovoljen ako je $C_1 = 0$ ili ako je $\sin \alpha l = 0$. U prvom slučaju dobit ćemo trivijalno rješenje $w(x) = 0$, tj. elastična linija je pravac. To nam pokazuje da je ravan oblik štapa jedan od mogućih ravnotežnih oblika štapa. Prema tome, za određivanje kritične sile preostaje nam izraz

$$\sin \alpha l = 0,$$

odnosno

$$\alpha l = n\pi \qquad n = 0, 1, 2, 3 \ldots \tag{13.4}$$

Uvrstimo li izraz (13.2) u (13.4), dobit ćemo

$$l \cdot \sqrt{\frac{F}{EI_y}} = n\pi.$$

Odavde možemo odrediti vrijednost sile pri kojoj nastupa izvijanje, tj.

$$F = n^2 \frac{EI_y}{l^2} \pi^2. \tag{13.5}$$

Jednadžba elastične linije u tom slučaju glasi

$$w = C_1 \sin \alpha x = C_1 \sin \frac{n\pi}{l} x. \tag{13.6}$$

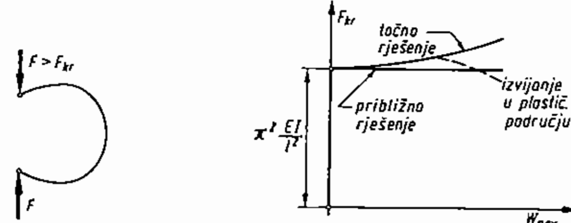
Elastična linija može imati više oblika, ovisno o tome koju vrijednost ima n. Svakom obliku elastične linije odgovara druga sila izvijanja. Ako je $n = 0$, prema (13.5), bi će $F = 0$, a prema (13.6) vidimo da je elastična linija pravac (sl. 13.3c). Ako je $n = 1$, elastična linija ima oblik sinusnog poluvala, kako je prikazano na slici 13.3d. Sila izvijanja ima u tom slučaju najmanju vrijednost, tj. ona je kritična sila pri kojoj nastupa izvijanje i iznosi

$$F_{kr} = \frac{EI_y}{l^2} \pi^2. \tag{13.7}$$

Ta se sila naziva i Eulerova kritična sila jer je taj izraz izveo L. Euler još 1757.

Kad je $n = 2$, elastična linija ima oblik pune sinusoide, prema slici 13.3e, dok je sila izvijanja četiri puta veća od kritične sile. Na slici 13.3f prikazana je forma izvijanja pri $n = 3$. U tom je slučaju sila izvijanja devet puta veća od kritične sile pri osnovnoj formi izvijanja. Više forme izvijanja mogu se ostvariti u laboratorijskim uvjetima; međutim, u praksi se izvijanje vrši uvijek po prvoj formi, čim sila F pređe kritičnu vrijednost F_{kr}. Ako silu i dalje povećavamo, doći će ili do loma štapa ili do savijanja štapa u oblik petlje, prema slici 13.4.

Pri izvođenju diferencijalne jednadžbe elastične linije uzeli smo da je zakrivljenost elastične linije dana izrazom $\varkappa = d^2w/dx^2$, tj. pretpostavili smo male pomake. Prema tome, izrazi (13.5) do (13.7) vrijede samo za male pomake. Da bismo odredili silu koja je potrebna da drži štap u jako izvijenom obliku, potrebno je za



Slika 13.4. Jako izvijanje štapa

Slika 13.5. Usporedba točnog i približnog rješenja izvijanja štapa

zakrivljenost uzeti točan izraz za zakrivljenost (9.15). U tom slučaju dobili bismo nelinearnu diferencijalnu jednadžbu. Rješavanjem te diferencijalne jednadžbe (što zbog složenosti postupka nećemo ovdje provesti) dobili bismo veću vrijednost za kritičnu silu od one koju daje izraz (13.7). Kritična je sila u tom slučaju to veća što je veći maksimalan pomak w_{max}, vidi sliku 13.5. Pri malim pomacima točno se rješenje podudara s približnim. Pri proračunu izraz (13.7) daje nam pouzdane rezultate jer njime određujemo silu pri kojoj počinje izvijanje a ne ponašanje štapa u procesu izvijanja. Izvijanje nastaje oko one osi poprečnog presjeka za koju je krutost štapa najmanja, a to je druga glavna os tromosti štapa. Prema tome, u izrazu (13.7) treba za moment tromosti uvrstiti $I_{min} = I_2$.

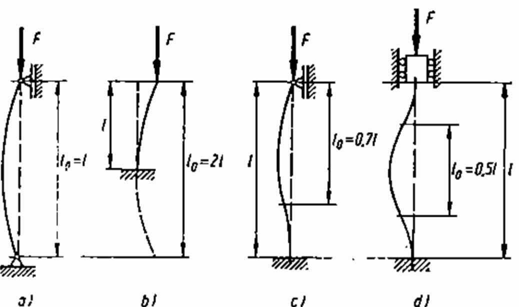
Ako štap na krajevima nije vezan zglobno, kao na slici 13.3, možemo kritičnu silu izvijanja odrediti uvrštavanjem odgovarajućih rubnih uvjeta. Ovdje navodimo samo rezultate. Za štap koji je na jednom kraju uklješten, a na drugom slobodan (slika 13.6b), kritična sila iznosi

$$F_{kr} = \pi^2 \frac{EI_{min}}{4l^2} = \pi^2 \frac{EI_{min}}{l_0^2},$$

gdje je l_0 duljina izvijanja. U tom je slučaju $l_0 = 2l$. Izraz

$$F_{kr} = \frac{2EI_{min}}{l_0^2} \tag{13.8}$$

vrijedi općenito za proizvoljno učvršćen štap ako ispravno odaberemo duljinu izvijanja l_0. Na slici 13.6 dane su vrijednosti duljine izvijanja za najčešće slučajeve učvršćenja štapova. Kako se vidi na slici, duljina izvijanja jest duljina jednog poluvala sinusne ili kosinusne funkcije, tj. duljina između dvije točke infleksije.



Slika 13.6. Forme izvijanja i slobodne duljine izvijanja štapa za različite načine učvršćenja njegovih krajeva

Ako izraz (13.8) podijelimo s površinom A poprečnog presjeka štapa, dobit ćemo

$$\frac{F_{kr}}{A}=\pi^2\frac{EI_{\min}/A}{l_0^2}.$$

Uvest ćemo pojam kritičnog naprezanja $\sigma_{kr}=F_{kr}/A$. Treba imati na umu da se ovdje ne radi o stvarnom naprezanju u nekoj točki nego o prosječnom naprezanju po presjeku štapa. Također je prema (4.32) $I_{\min}/A=i_{\min}^2$ pa možemo pisati

$$\sigma_{kr}=\pi^2 E\left(\frac{i_{\min}}{l_0}\right)^2$$

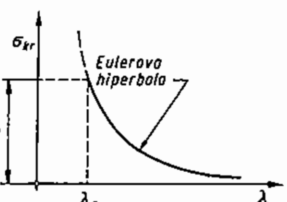
odnosno

$$\sigma_{kr}=\pi^2\frac{E}{\lambda^2}, \tag{13.9}$$

gdje je

$$\lambda=\frac{l_0}{i_{\min}}. \tag{13.10}$$

bezdimenzionalna karakteristika štapa i naziva se vitkost štapa. Izraz (13.9) prikazan je grafički na slici 13.7 i ima oblik hiperbole. Pri velikoj vitkosti σ_{kr} teži nuli, što



Slika 13.7. Ovisnost kritičnog naprezanja o vitkosti štapa

se dobro slaže s eksperimentima jer se vrlo vitki štapovi izvijaju već i pri najmanjem opterećenju (npr. vlastitom težinom). Pri maloj vitkosti σ_{kr} teži vrlo velikim vrijednostima, mnogo većim od onih koje se dobivaju pokusom. To neslaganje prvi je objasnio E. Lamarle 1846. Naime, izrazi (13.8) i (13.9) dobiveni su rješavanjem diferencijalne jednadžbe (13.1), pri čemu je pretpostavljeno da je modul elastičnosti E konstantan. Prema tome, izraz (13.9) vrijedi samo za $\sigma_{kr}<\sigma_p$, a za veće vrijednosti ne vrijedi. Graničnu vitkost λ_p dobit ćemo ako u izraz (13.9) uvrstimo $\sigma_{kr}=\sigma_p$ i $\lambda=\lambda_p$, tj.

$$\lambda_p=\pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}. \tag{13.11}$$

Izrazi (13.7), (13.8) i (13.9) vrijede ako je $\lambda>\lambda_p$.

13.3. Izvijanje štapa u plastičnom području

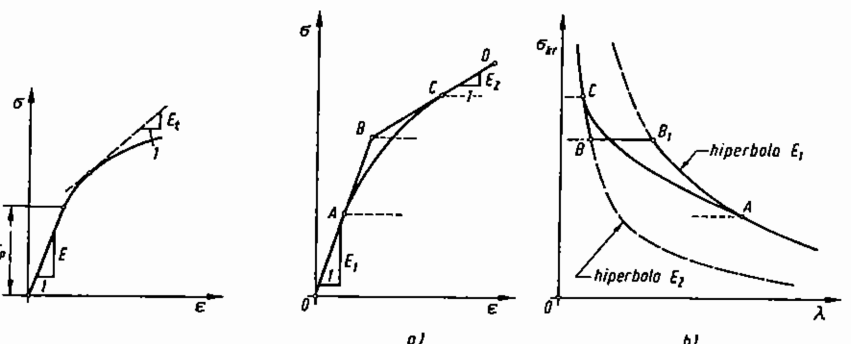
Izraz (13.9) za kritično naprezanje možemo formalno zadržati i u plastičnom području ako umjesto modula elastičnosti E uvrstimo tzv. tangentni modul elastičnosti E_t koji je definiran izrazom

$$E_t=\frac{d\sigma}{d\varepsilon}, \tag{13.12}$$

prema slici 13.8. U tom slučaju izraz za kritično naprezanje glasi

$$\sigma_{kr}=\pi^2\frac{E_t}{\lambda^2}. \tag{13.13}$$

Izraz (13.12) predložio je 1889. Engesser. Oblik dijagrama (13.13) ovisi o obliku dijagrama rastezanja $\sigma=f(\varepsilon)$. Na slici 13.9a prikazani su dijagrami rastezanja za dva materijala, a na slici 13.9b odgovarajući dijagrami $\sigma_{kr}=f(\lambda)$. Kod prvog materijala dijagram rastezanja sastoji se od pravca OAB (modul elastičnosti E_1) i pravca BC (modul elastičnosti E_2). Svakom modulu elastičnosti odgovara jedna hiperbola. Dijagram kritičnog naprezanja slijedi crtu CBB_1A, kako je prikazano na

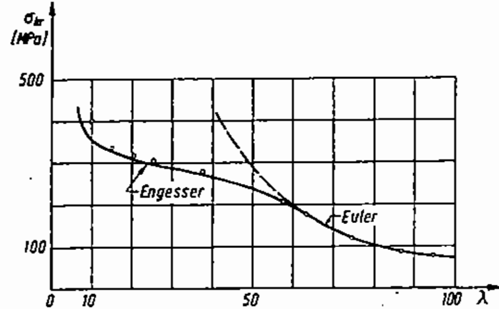


Slika 13.8. Definicija tangentnog modula elastičnosti

Slika 13.9. Ovisnost kritičnog naprezanja o vitkosti štapa kad je naprezanje veće od granice proporcionalnosti

slici 13.9b. Pri velikim naprezanjima $\sigma_{kr}=f(\lambda)$ slijedi hiperbolu E_2, a zatim pri smanjenju naprezanja u točki B skokovito prelazi na hiperbolu E_1. Dijagram rastezanja drugog materijala sastoji se od pravca OA, krivulje AC i pravca CD. Budući da se u tom slučaju modul elastičnosti mijenja postepeno, dijagram $\sigma_{kr}=f(\lambda)$ postepeno prelazi od hiperbole E_2 na hiperbolu E_1 po krivulji CA.

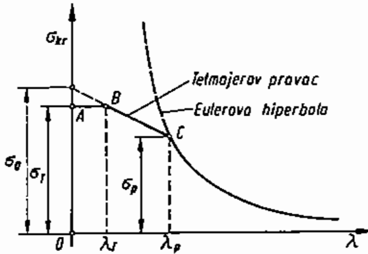
Na slici 13.10 prikazana je ovisnost $\sigma_{kr}=f(\lambda)$ za jednu aluminijsku leguru (17 S – T prema američkom standardu). Punom crtom izvučena je Engesserova krivulja i Eulerova hiperbola. Kružićima su označeni eksperimentalni podaci. Vidimo da se u tom slučaju teorijski rezultati vrlo dobro slažu s eksperimentalnim. Ipak Engesserova metoda rijetko se koristi u praksi jer je za nju potrebno imati precizan dijagram rastezanja, a i analiza tog dijagrama dosta je složena.



Slika 13.10. Usporedba teorijskih i eksperimentalnih rezultata kod izvijanja

13.4. Empirijski izrazi za kritično naprezanje

Zbog složenosti Engesserova postupka u praksi se služimo približnim empirijskim izrazima. Postupak se sastoji u tome da se krivulja $\sigma_{kr}=f(\lambda)$ u plastičnom području aproksimira pravcem (Jasinski, Tetmajer), parabolom (Tetmajer, Johnson), hiperbolom (Rankine, Gordon) itd. U zagradi su spomenuta imena predlagača. Osim spomenutih istraživača u literaturi se mogu naći mnoga druga imena. Mi ćemo se uglavnom služiti Tetmajerovim izrazima. Tetmajer je za čelik i mnoge druge materijale predložio pravac, prema slici 13.11.



Slika 13.11. Dijagram kritičnog izvijanja u elastičnom i plastičnom području

Taj pravac prolazi kroz točke $E(0, \sigma_0)$ i $C(\lambda_p, \sigma_p)$, pa njegovu jednadžbu možemo pisati u obliku

$$\sigma_{kr}=\sigma_0-(\sigma_0-\sigma_p)\frac{\lambda}{\lambda_p}, \tag{13.14}$$

gdje je σ_p granica proporcionalnosti, a σ_0 neko karakteristično naprezanje koje se dobiva kad eksperimentalne podatke o izvijanju aproksimiramo pravcem. Smanjenjem vitkosti štapa raste kritično naprezanje i pri određenoj vitkosti, koju ćemo označiti s λ_T, dostiže granicu tečenja σ_T. Pri manjoj vitkosti od σ_T prije će doći do gnječenja (tečenja) štapa nego do izvijanja, pa primjena izraza (13.14) nema opravdanja. Lako možemo izračunati da je

$$\lambda_T=\lambda_p\frac{\sigma_o-\sigma_T}{\sigma_o-\sigma_p}. \tag{13.15}$$

Prema tome razlikujemo tri područja:

a) kratki štapovi $\lambda<\lambda_T$

Štapovi se jednostavno proračunavaju na tlačnu čvrstoću i izvijanje se ne uzima u obzir.

b) srednje dugi štapovi $\lambda_T<\lambda<\lambda_p$

Štapovi se proračunavaju na izvijanje pomoću izraza (13.14) ili nekog drugog empirijskog izraza.

c) vitki štapovi $\lambda>\lambda_p$

Štapovi se proračunavaju na izvijanje pomoću Eulerova izraza (13.9).

Pri korištenju izrazima (13.11), (13.14) i (13.15) potrebno je poznavati granicu proporcionalnosti. Ako ne raspolažemo tim podatkom, možemo približno uzeti da je $\sigma_p=0.8\,\sigma_T$.

Navodimo nekoliko Tetmajerovih izraza za čelične materijale i sivi lijev. Naprezanja su izražena u MPa:

Č.0360	$\sigma_{kr}=310-1.14\lambda$
Č.0460	$\sigma_{kr}=335-0,62\lambda$
Č.0560	$\sigma_{kr}=470-2.3\lambda$
Sivi lijev	$\sigma_{kr}=776-12\lambda+0,053\lambda^2$.

Slične izraze za druge materijale možemo naći u priručnicima.

Omega postupak

Pri proračunu čeličnih i drvenih konstrukcija često se koristimo tzv. ω-postupkom. Uvođenjem koeficijenta ω proračun na izvijanje svodi se na proračun

tlačnog opterećenja. Da se osiguramo protiv izvijanja, zamišljamo da je štap opterećenom silom koja je ω puta veća od stvarne, tj.

$$\sigma = \frac{\omega F}{A} \leqslant \sigma_{dop}. \tag{13.16}$$

Odavde je potrebna površina poprečnog presjeka

$$A > \frac{\omega F}{\sigma_{dop}}. \tag{13.17}$$

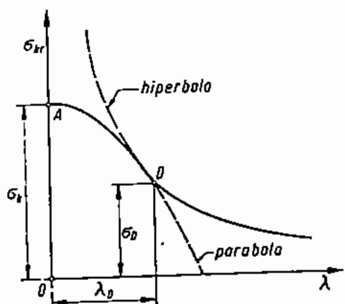
Ovdje je σ_{dop} dopušteno tlačno naprezanje. Koeficijent ω ima to veću vrijednost što je veći λ. Koeficijenti ω za razne materijale mogu se naći u tehničkim priručnicima.

Aproksimacija Johnsonovom parabolom

Dobra aproksimacija kritičnog naprezanja u plastičnom području može se dobiti pomoću parabole koja dodiruje Eulerovu hiperbolu

$$\sigma_{kr} = \sigma_k - b\lambda^2, \tag{13.18}$$

gdje je σ_k kritično naprezanje koje se ne smije pojaviti u konstrukciji. Kod duktilnih ili rastezljivih materijala uzima se da je σ_k jednako granici tečenja σ_T, a kod krhkih



Slika 13.12. Aproksimacija kritičnog naprezanja Johnsonovom parabolom

materijala je σ_k jednako tlačnoj čvrstoći. Iz uvjeta tangencijalnosti Johnsonove parabole i Eulerove hiperbole možemo dobiti vrijednosti konstante b

$$b = \frac{\sigma_k^2}{4\pi^2 E}. \tag{13.19}$$

Točka dodira D, slika 13.12, ima koordinate:

$$\lambda_D = \pi - \sqrt{\frac{2E}{\sigma_k}}, \qquad \sigma_D = \frac{\sigma_k}{2}. \tag{13.20}$$

Po toj metodi u području $\lambda < \lambda_D$ računa se kritično naprezanje po Johnsonovoj paraboli (13.18), a u području $\lambda > \lambda_D$ po Eulerovoj hiperboli (13.9).

PRIMJER 13.1

Profil U – 20 upotrijebljen je kao stup, prema slici 13.13. Naći kritičnu silu izvijanja ako je zadano:

$\sigma_T = 220\,\text{MPa}$ $\qquad E = 210\,\text{GPa}$

$\sigma_p = 180\,\text{MPa}$ $\qquad A = 32{,}2\,\text{cm}^2$

$\sigma_0 = 310\,\text{MPa}$ $\qquad I_{min} = I_y = 148\,\text{cm}^4$.

Zadatak riješiti za dvije razne visine:

a) $h = 1{,}8\,\text{m}$ $\qquad$ b) $h = 1\,\text{m}$.

Slika 13.13

Da bismo odredili hoćemo li proračun vršiti po Euleru ili Tetmajeru, potrebno je odrediti λ_p:

$$\lambda_p = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = \pi\sqrt{\frac{210000}{180}} = 107{,}3.$$

Minimalni polumjer inercije iznosi

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{148}{32{,}2}}\,\text{cm} = 2{,}14\,\text{cm}.$$

a)

Duljina izvijanja jest $\qquad l_0 = 2h = 3{,}6\,\text{m}$,

pa je vitkost štapa $\qquad \lambda = \dfrac{l_0}{i_{min}} = 168.$

Kako je $\lambda > \lambda_p$, kritično naprezanje, izračunat ćemo pomoću Eulerova izraza

$$\sigma_{kr} = \pi^2\frac{E}{\lambda^2} = 73{,}4\,\text{MPa}.$$

Kritična sila jest $\qquad F_{kr} = \sigma_{kr} A = 236{,}3\,\text{kN}.$

b)

Duljina izvijanja jest $\qquad l_0 = 2h = 2\,\text{m}$

pa je vitkost štapa $\qquad \lambda = \dfrac{l_0}{i_{min}} = 93{,}46$

$$\sigma_{kr} = \sigma_0 - (\sigma_0 - \sigma_p)\frac{\lambda}{\lambda_p}$$

$$\sigma_{kr} = 310 - \frac{310-180}{107{,}3}\cdot 93{,}46 = 196{,}8\ \mathrm{MPa}.$$

Kritična sila izvijanja u tom slučaju iznosi

$$F_{kr} = \sigma_{kr} A = 633{,}6\ \mathrm{kN}.$$

PRIMJER 13.2

Štap kružnog poprečnog presjeka duljine l vezan je na oba kraja zglobno i opterećen tlačno silom $F=50\,\mathrm{kN}$. Odrediti promjer štapa ako je $l=2\,\mathrm{m}$, a faktor sigurnosti $S=3{,}5$. Karakteristike materijala iste su kao i u prethodnom primjeru. Nakon odabranog promjera odrediti stvarni koeficijent sigurnosti.

U tom slučaju ne možemo unaprijed odrediti da li se kritično naprezanje računa po Euleru ili Tetmajeru jer ne poznamo i_{min}, pa ne možemo odrediti vitkost štapa. Zadatak se rješava pokušavanjem u nekoliko koraka. U prvom koraku procijenimo potreban poprečni presjek: kad bi štap bio vrlo kratak, dopušteno naprezanje bilo bi

$$\sigma_{dop} = \frac{\sigma_T}{S} = 62{,}86\ \mathrm{MPa}.$$

Potrebna površina poprečnog presjeka u tom slučaju iznosi

$$A = \frac{F}{\sigma_{dop}} = \frac{50\cdot 10^3}{62{,}86\cdot 10^6} = 0{,}795\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^2 = 7{,}95\ \mathrm{cm}^2.$$

Lako možemo izračunati promjer

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 3{,}18\ \mathrm{cm}.$$

Zbog opasnosti od izvijanja uzet ćemo nešto veću vrijednost, npr. $d=4\,\mathrm{cm}$. Sada možemo provjeriti kritično naprezanje. Kako je za kružni presjek

$$I_{min} = \frac{\pi d^4}{64} \quad \text{i} \quad A = \frac{\pi d^2}{4},$$

bit će

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \frac{d}{4} = 1\ \mathrm{cm}.$$

Odavde je

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{min}} = \frac{200}{1} = 200.$$

Granična vitkost λ_p ista je kao i u prethodnom zadatku, tj. 107,3. Kako je $\lambda > \lambda_p$, računamo po Euleru:

$$\sigma_{kr} = \pi^2\frac{E}{\lambda^2} = \pi^2\frac{210000}{200^2} = 51{,}82\ \mathrm{MPa}$$

$$\sigma_{dop} = \frac{\sigma_{kr}}{S} = \frac{51{,}82}{3{,}5} = 14{,}81\ \mathrm{MPa}.$$

Površina poprečnog presjeka jest

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = 12{,}57\ \mathrm{cm}^2.$$

Stvarno naprezanje u štapu iznosi

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{50\cdot 10^3}{12{,}57\cdot 10^{-4}} = 39{,}8\cdot 10^6\ \mathrm{Pa} = 39{,}8\ \mathrm{MPa}.$$

Kako je stvarno naprezanje mnogo veće od σ_{dop}, moramo odabrati veći poprečni presjek. Odaberimo $d=5{,}4\,\mathrm{cm}$. U tom je slučaju

$$i_{min} = 1{,}35\ \mathrm{cm},\ \lambda = 148{,}1$$

$$\sigma_{kr} = \pi^2\frac{E}{\lambda^2} = 94{,}43\ \mathrm{MPa}, \qquad \sigma_{dop} = 26{,}98\ \mathrm{MPa}.$$

Površina presjeka jest $A=22{,}83\,\mathrm{cm}^2$, pa je stvarno naprezanje

$$\sigma = \frac{F}{A} = 21{,}83\ \mathrm{MPa} < \sigma_{dop}.$$

Stvarni faktor sigurnosti iznosi

$$S = \frac{\sigma_{kr}}{\sigma} = \frac{94{,}43}{21{,}83} = 4{,}32.$$

Odabiranjem nešto manjeg promjera možemo približiti faktor sigurnosti vrijednosti 3,5.

14. EKSPERIMENTALNA ANALIZA NAPREZANJA

14.1. Eksperimentalne, numeričke i analitičke metode analize naprezanja

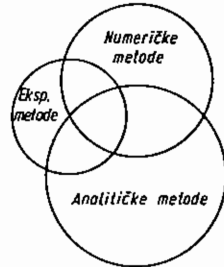
Do sada smo određivali naprezanja i deformacije isključivo analitički, i to uglavnom u štapovima kao najjednostavnijim dijelovima konstrukcija. Čak smo i u tim jednostavnim problemima morali uvoditi pretpostavke o deformiranju i/ili pretpostavke o raspodjeli naprezanja. Pritom je točnost izvedenih izraza ovisila o tome kako su uvedene pretpostavke ispunjene. Mnoge vrlo važne probleme, kao npr. problem koncentracije naprezanja, ne možemo riješiti metodama nauke o čvrstoći, nego moramo posegnuti za analitičkim metodama teorije elastičnosti, pri čemu upotrebljeni matematički aparat postaje znatno složeniji. Vidimo da su u nekim područjima analitičke metode vrlo efikasne, ali nisu sveobuhvatne jer se vrlo velik broj važnih problema ne može na jednostavan način riješiti analitički.

Mnoge takve probleme možemo riješiti numeričkim metodama. Naročito je pogodna metoda konačnih elemenata. Nažalost, sa složenošću problema raste potreba za kapacitetom računala. Često se dešava da za rješavanje vrlo složenih problema naše računalo nema potreban kapacitet.

S druge strane, da bismo riješili bilo koji problem analize naprezanja analitičkim ili numeričkim metodama, mora nam biti poznato opterećenje, što nije uvijek slučaj. Npr. sile koje djeluju na kotače vozila koje vozi po neravnu putu, sile na avionsko krilo pri turbulentnom strujanju, sile na oplatu broda koji plovi po uzburkanom moru nisu nam unaprijed poznate. Njih analitički možemo samo procijeniti. U tim slučajevima primjena eksperimentalnih metoda postaje nezaobilazna.

Općenito se može reći da analitičke, numeričke i eksperimentalne metode nisu međusobno konkurentne. Mnogi problemi mogu se riješiti podjednako dobro bilo kojom od tih metoda. Koju ćemo metodu primijeniti ovisi o opremljenosti institucije i o osposobljenosti osoblja. Međutim, pri rješavanju određenih problema može pojedina metoda imati izrazitu prednosti i biti čak neizbježna. Zbog toga se moramo upoznati sa sve tri metode. Osnovne pojmove o eksperimentalnim metodama upoznat ćemo u ovom poglavlju. S numeričkim metodama analize naprezanja upoznat ćemo se u okviru drugih predmeta. Područje primjene tih metoda prikaza-

no je na slici 14.1. Na kraju napomenimo da se novouvedene metode analize naprezanja provjeravaju pomoću ostalih metoda. Tako se npr. neka numerička metoda provjerava pomoću analitičke na primjerima gdje postoji analitičko rješenje ili se provjerava eksperimentalnom metodom. Novouvedena eksperimentalna metoda provjerava se numeričkom metodom itd.



Slika 14.1. Preklapanje analitičkih, numeričkih i eksperimentalnih metoda analize naprezanja

14.2. Eksperimentalne metode analize naprezanja

Neke eksperimentalne metode mogu se primijeniti samo na modelima, dok se druge mogu primijeniti i na izvedenim originalnim konstrukcijama. Pojedine metode pogodne su za laboratorijsku primjenu u istraživačkim institutima, dok su druge pogodnije za primjenu na terenu, odnosno u samim pogonima. Postoji velik broj eksperimentalnih metoda analize naprezanja. Mnoge od njih su se razvile u čitave discipline. Nabrojat ćemo samo neke važnije metode:

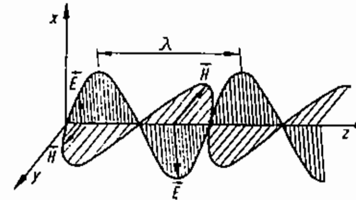
a) fotoelasticimetrija
b) tenzometrija
c) metoda krhkih lakova
d) ostale optičke metode, kao: interferometrija, holografija itd.
e) metode analogije
f) metoda akustičke emisije
g) metoda rendgenskog zračenja.

14.3. Osnovni pojmovi optike, fotoelasticimetrija

Fotoelasticimetrija je optička metoda analize naprezanja koja iskorištava svojstvo *fotoelastičnih materijala* da u napregnutom stanju postaju dvolomni. Veličina dvoloma ovisi o veličini i rasporedu naprezanja i može se mjeriti pomoću *polariziranog* svjetla u *polariskopu*. Ovdje ćemo samo navesti osnovne činjenice o fotoelasticimetriji ne ulazeći u njihovo objašnjavanje. Ipak, da bismo mogli shvatiti osnovne postavke fotoelasticimetrije, navest ćemo neke osnovne zakone i činjenice iz optike.

Svjetlo je vidljiv dio elektromagnetskog zračenja koje ima valnu duljinu raspona od 380 do 770 nm (1 nm = 10^{-9} m). Elektromagnetski val prikazan je na slici 14.2. Svjetlo i svi elektromagnetski valovi šire se kroz vakuum brzinom c od približno 300 Mm/s (1 Mm/s = 10^6 m/s).

Vektori $\vec{E}$ i $\vec{H}$ na slici 14.2 jesu vektori jakosti električnog i magnetskog polja. Oni su međusobno povezani i okomiti. Zbog toga je dovoljno razmatrati promjenu samo jednog vektora. Obično se razmatra električni vektor $\vec{E}$, i on se tada naziva *vektor svjetla*.



Slika 14.2. Elektromagnetski val valne duljine λ

Kad vektor svjetla titra u jednoj ravnini, kao na slici 14.2, nije potrebno naglašavati vektorski karakter jer je smjer vektora određen unaprijed. Promjena veličine vektora u vremenu i prostoru (širenje vala) određena je izrazom

$$E = E_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{\lambda} z + \varphi_0\right) \tag{14.1}$$

odnosno

$$E = E_0 \sin(\omega t - kz + \varphi_0), \tag{14.2}$$

gdje je E_0 amplituda vala, T vrijeme titraja, λ valna duljina, φ_0 početna faza, ω kružna frekvencija i $k = 2\pi/\lambda$.

Ako razmatramo promjenu vektora svjetla u nekoj određenoj točki prostora, npr. u nekoj točki modela, izraz (14.2) možemo pojednostaviti pogodnim izborom početnog trenutka i ishodišta koordinatnog sustava. Tada je

$$E = E_0 \sin \omega t \qquad \text{ili} \qquad E = E_0 \cos \omega t \tag{14.3}$$

Ako razmatramo više komponenata svjetla, ne možemo kod svih isključiti postojanje početne faze, pa izraz (14.3) ima oblik

$$E = E_0 \sin(\omega t + \varphi). \tag{14.4}$$

Već smo spomenuli da se elektromagnetski val širi u vakuumu brzinom c. Približno je to i brzina širenja vala u zraku. U gušćem sredstvu (npr. voda, staklo itd.), val se širi sporije brzinom v koja je određena izrazom

$$v = \frac{c}{n}, \tag{14.5}$$

gdje je n indeks loma. Indeks loma definira kut pod kojim se zraka lomi. Prema slici 14.3 zakon loma glasi

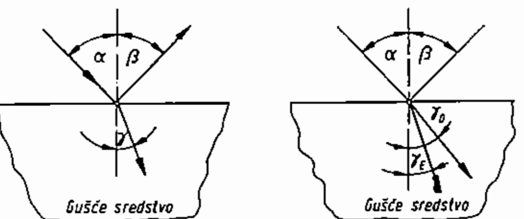
$$n=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}, \tag{14.6}$$

gdje je α kut upadanja, a γ kut loma. Sunčevo svjetlo ili svjetlo koje emitiraju električne žarulje sadrži zračenje raznih valnih duljina i naziva se bijelo ili *polikromatsko* (višebojno) svjetlo. Ako svjetlo sadrži zračenje samo jedne valne duljine, naziva se monokromatsko (jednobojno). Boja svjetlosti ovisi o valnoj duljini. U tablici 14.1 dane su prosječne valne duljine za razne boje.

Tablica 14.1

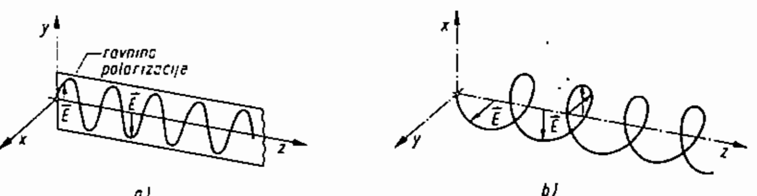
Valne duljine za razne boje

Boja	λ u nm
Ljubičasta	410
Indigo	430
Plava	470
Zelena	530
Žuta	570
Narančasta	710
Crvena	730



Slika 14.3. Lom svjetla: a) optički izotropan materijal, b) optički anizotropan (dvoloman) materijal

Kod prirodnog svjetla vektor svjetla titra okomito na smjer širenja zrake u svim smjerovima na nesređen način. Ako je titranje vektora svjetla na neki način sređeno, kažemo da je svjetlo *polarizirano*. Svjetlo je *ravninski polarizirano* ako svi vektori svjetla (tj. vektori $\vec{E}$) leže u jednoj ravnini, a njihovi vrhovi opisuju u svakom trenutku sinusoidu. Ako je svjetlo *kružno polarizirano*, vektori svjetla imaju konstantnu veličinu i stoje okomito na zraku, a njihovi vrhovi opisuju kružnu zavojnicu. Ako vrhovi vektora svjetla umjesto kružne opisuju eliptičnu zavojnicu, svjetlo je *eliptično polarizirano*. Na slici 14.4 prikazano je ravninski i kružno polarizirano svjetlo.



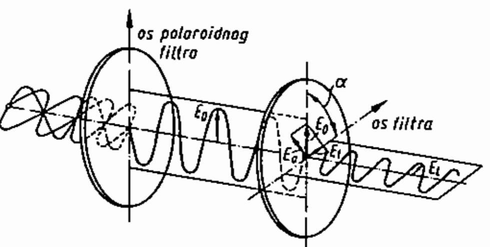
Slika 14.4. Polarizirano svjetlo a) ravninski polarizirano, b) kružno polarizirano

Polaroidni filtar optički je element koji ima svojstvo da nepolarizirano svjetlo pretvara u ravninski polarizirano. *Ravnina polarizacije* prolazi kroz os polaroidnog filtra. Jakost izlaznog polariziranog svjetla može biti u najboljem slučaju jednaka polovini jakosti upadnog nepolariziranog svjetla. Ako na polaroidni filtar pada polarizirano svjetlo i ako je ravnina polarizacije paralelna s osi filtra, svjetlo prolazi u cijelosti kroz filtar. Ako je ravnina polarizacije upadnog svjetla okomita na os

filtra, filtar neće propustiti svjetlo. Kad ravnina polarizacije čini kut α, rastavlja se u dvije komponente:

$$E_a = E\sin\alpha = E_0\sin\alpha\sin\omega t$$
$$E_t = E\cos\alpha = E_0\cos\alpha\sin\omega t, \tag{14.7}$$

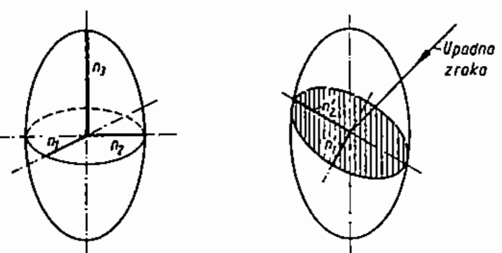
gdje je E_0 amplituda upadnog svjetla. E_a je amplituda apsorbiranog svjetla, a E_t amplituda propuštenog polariziranog svjetla. Prolaz svjetla kroz polaroidne filtre ilustriran je na slici 14.5.



Slika 14.5. Prolaz svjetla kroz dva polaroidna filtra čije osi čine kut α

14.4. Optički anizotropni materijali, elipsoid indeksa loma

Već smo spomenuli da je brzina svjetlosti u gušćim sredstvima manja od brzine u vakuumu i da iznosi $v=c/n$. Pritom smo podrazumijevali da se svjetlo širi u svim smjerovima istom brzinom. Takvi materijali nazivaju se *optički izotropni*. Nasuprot tome, materijali u kojih brzina širenja svjetla ovisi o smjeru jesu *optički anizotropni*. Očito je da u takvim materijalima veličina indeksa loma ovisi o smjeru, slično kao što naprezanje ovisi o orijentaciji presjeka na kome djeluje. Zapravo indeksi loma tvore tenzor drugog reda, pa je dovoljno poznavati tri glavna indeksa loma: n_1, n_2 i n_3, koji se odnose na tri međusobno okomite osi.



Slika 14.6. Elipsoid indeksa loma

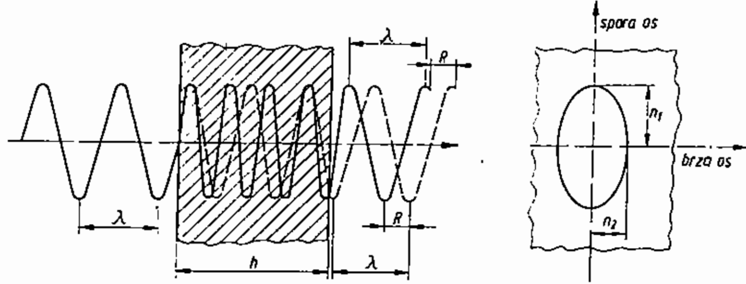
Analogno elipsoidu naprezanja možemo konstruirati elipsoid indeksa loma. Njegove su glavne poluosi n_1, n_2 i n_3. Takav elipsoid prikazan je na slici 14.6. Opisat ćemo postupak kako možemo odrediti indekse loma za proizvoljan smjer kad poznamo tri glavna indeksa loma: n_1, n_2 i n_3.

Na mjestu gdje upadna zraka svjetla ulazi u materijal konstruiramo elipsoid indeksa loma. Zatim postavimo ravninu koja je okomita na upadnu zraku i koja prolazi kroz središte elipsoida. Ta ravnina siječe elipsoid u elipsi čije su poluosi n_1' i n_2'. Te poluosi nazivaju se *sekundarni glavni indeksi* loma jer su to najveći i najmanji indeksi loma u ravnini koja je okomita na zraku svjetla.

Svaka zraka svjetla koja upada u optički anizotropni materijal rastavlja se u dvije ravninski polarizirane komponente. Jedna komponenta titra u ravnini koja prolazi kroz poluos n_1' i širi se brzinom $v_1 = c/n_1'$. Druga komponenta titra u ravnini koja prolazi kroz poluos elipse n_2' i prostire se brzinom $v_2 = c/n_2'$. Prva komponenta svjetla naziva se *spora* komponenta, a druga *brza* komponenta. Kako su im brzine različite, te dvije komponente nakon prolaza kroz materijal razlikuju se u fazi. Prema tome vidimo da se pri upadu svaka zraka rastavlja u dvije komponente. Za svaku od tih komponenata vrijedi drugi indeks loma, pa se svaka komponenta lomi pod drugim kutom, tj. od jedne upadne zrake nastaju dvije lomljene zrake, kako je prikazano na slici 14.6b. Zato se optički anizotropni materijali zovu još i dvolomni materijali.

14.5. Prolaz svjetla kroz planparalelnu anizotropnu ploču

Slika 14.7 prikazuje planparalelnu ploču, tj. ravnu ploču konstantne debljine h. Ploča je napravljena od optički anizotropnog materijala. Ravnina ploče siječe elipsoid indeksa loma u elipsi s glavnim poluosima n_1 i n_2. Os na koju se odnosi



Slika 14.7. Prolaz svjetla kroz optički anizotropnu planparalelnu ploču

indeks n_1 zvat ćemo *spora os* ploče, a os na koju se odnosi n_2 *brza os*. Zraka svjetla, kad padne na ploču, rastavlja se u dvije komponente: brzu i sporu. Brza komponenta prolazi kroz ploču brzinom v_2, a spora brzinom v_1. Te su brzine dane izrazom

$$v_1 = \frac{c}{n_1} \quad , \quad v_2 = \frac{c}{n_2}. \tag{14.8}$$

Spora komponenta prolazi kroz ploču za vrijeme t_1, a brza za vrijeme t_2, gdje je

$$t_1 = \frac{h}{v_1} \quad , \quad t_2 = \frac{h}{v_2}. \tag{14.9}$$

Brza komponenta prolazi brže kroz ploču i u vremenu Δt prostire se kroz prostor iza ploče do trenutka kada i spora komponenta napusti ploču. Očito je

$$\Delta t = t_1 - t_2 = h\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right). \tag{14.10}$$

Kako se brza komponenta, kad napusti ploču, širi brzinom c, prevalit će u vremenu Δt put R koji iznosi

$$R = c\,\Delta t = h\left(\frac{c}{v_1} - \frac{c}{v_2}\right).$$

Uzmemo li u obzir izraz (14.8), dobit ćemo

$$R = h\,(n_1 - n_2). \tag{14.11}$$

Veličina R zapravo je retardacija ili zaostajanje spore komponente u odnosu na brzu komponentu. Promjenom debljine h možemo promijeniti retardaciju. Ploča koja ima takvu debljinu da je $R = \lambda/4$ zove se *četvrtvalna ploča*. Ako je $R = \lambda/2$, ploča se zove *poluvalna ploča*. Jasno je da se četvrtvalna i poluvalna ploča mogu izraditi samo za monokromatsko svjetlo točno određene valne duljine λ.

14.6. Piezooptički efekt, fotoelastični materijali

Neki materijali, npr. staklo i mnogi prozirni polimerni materijali u nenapregnutom stanju optički su izotropni, a kad se napregnu, postaju optički anizotropni. Takvi materijali zovu se *fotoelastični materijali* i od njih se izrađuju fotoelastični modeli.

Iznos optičke anizotropije mijenja se od točke do točke, ovisno o promjeni naprezanja. Pri tome je elipsoid indeksa loma koaksijalan i sličan elipsoidu naprezanja. Maxwell je 1853. eksperimentalno ustanovio vezu između naprezanja i promjene indeksa loma koja glasi

$$\begin{aligned} n_1 &= n + C_{1\sigma}\sigma_1 + C_{2\sigma}(\sigma_2 + \sigma_3) \\ n_2 &= n + C_{1\sigma}\sigma_2 + C_{2\sigma}(\sigma_3 + \sigma_1) \\ n_3 &= n + C_{1\sigma}\sigma_3 + C_{2\sigma}(\sigma_1 + \sigma_2), \end{aligned} \tag{14.12}$$

gdje je n indeks loma nenapregnutog materijala, a n_1, n_2 i n_3 glavni indeksi loma napregnutog materijala. Osi na koje se odnose indeksi n_1, n_2 i n_3 podudaraju se s pravcima σ_1, σ_2 i σ_3. $C_{1\sigma}$ i $C_{2\sigma}$ su *piezooptičke* konstante. Iz izraza (14.12) lako možemo dobiti da je

$$n_1 - n_2 = (C_{1\sigma} - C_{2\sigma})(\sigma_1 - \sigma_2)$$

odnosno

$$n_1 - n_2 = C_\sigma(\sigma_1 - \sigma_2), \tag{14.13}$$

gdje je

$$C_\sigma = C_{1\sigma} - C_{2\sigma} \,. \tag{14.14}$$

relativna piezooptička konstanta. Ako izraz (14.13) uvrstimo u (14.11), dobit ćemo

$$R = h\, C_\sigma (\sigma_1 - \sigma_2). \tag{14.15}$$

Kad apsolutnu retardaciju R podijelimo s valnom duljinom λ, dobit ćemo

$$N = \frac{R}{\lambda} = \frac{C_\sigma}{\lambda} (\sigma_1 - \sigma_2)\, h. \tag{14.16}$$

N izražava koliki dio valne duljine λ iznosi retardacija. Retardacija se može izraziti i u kutnoj mjeri Δ, tj.

$$\Delta = 2\pi \frac{C_\sigma}{\lambda} h (\sigma_1 - \sigma_2) = 2\pi \frac{R}{\lambda}. \tag{14.17}$$

Kako vidimo, retardaciji od jedne valne duljine odgovara relativna retardacija $N = 1$, odnosno kutna retardacija $\Delta = 2\pi$.

Veličine C_σ i λ vrlo su male veličine; međutim, njihov omjer to nije. Kako se u polariskopima upotrebljava monokromatsko svjetlo točno određene valne duljine, možemo omjer C_σ/λ smatrati konstantom. Uvođenjem nove *fotoelastične konstante* f_σ izrazi (14.16) i (14.17) prelaze u

$$N = \frac{\Delta}{2\pi} = \frac{R}{\lambda} = \frac{h}{f_\sigma} (\sigma_1 - \sigma_2), \tag{14.18}$$

gdje je

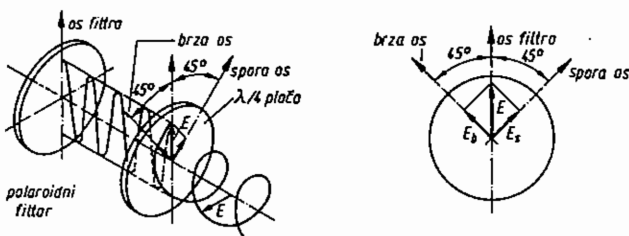
$$f_\sigma = \frac{\lambda}{C_\sigma} \tag{14.19}$$

fotoelastična konstanta materijala. Nju određujemo baždarenjem ili je daje proizvođač materijala.

14.7. Optički elementi polariskopa

Osnovni optički elementi polariskopa jesu polaroidni filtar i četvrtvalna ploča. Prolaz svjetla kroz dva polaroidna filtra objašnjen je na slici 14.5, odnosno pomoću izraza (14.7).

Prolaz svjetla kroz polaroidni filtar i četvrtvalnu ploču objašnjen je na slici 14.8. Svjetlo je nakon izlaska iz polaroidnog filtra ravninski polarizirano i titra po



Slika 14.8. Prolaz svjetla kroz polaroidni filtar i četvrtvalnu ploču

zakonu $E = E_0 \sin \omega t$. Kad dođe do četvrtvalne ploče, rastavlja se u dvije komponente: brzu E_b i sporu E_s, gdje je

$$\begin{aligned} E_b &= E \cos\alpha = E_0 \cos\alpha \sin\omega t \\ E_s &= E \sin\alpha = E_0 \sin\alpha \sin\omega t. \end{aligned} \tag{14.20}$$

Kut α je kut između brze osi b i osi polaroidnog filtra. Nakon prolaza kroz četvrtvalnu ploču, spora komponenta zaostaje za brzom za $\lambda/4$ ili $\pi/2$, tj. titra po zakonu $E'_s = E_0 \sin\alpha \sin(\omega t - \pi/2)$. Kako je $\sin(\omega t - \pi/2) = -\cos\omega t$, bit će

$$\begin{aligned} E'_b &= E_0 \cos\alpha \sin\omega t \\ E'_s &= -E_0 \sin\alpha \cos\omega t, \end{aligned} \tag{14.21}$$

gdje su E'_b i E'_s komponente vektora svjetla na izlasku iz četvrtvalne ploče. Njihovim sastavljanjem dobit ćemo rezultirajući vektor svjetla E^*. Izraz (14.21) možemo napisati u obliku

$$\frac{E'_b}{E_0 \cos\alpha} = \sin\omega t$$

$$\frac{E'_s}{E_0 \sin\alpha} = -\cos\omega t.$$

Ako oba izraza kvadriramo i zatim zbrojimo, dobit ćemo

$$\frac{(E'_b)^2}{(E_0 \cos\alpha)^2} + \frac{(E'_s)^2}{(E_0 \sin\alpha)^2} = 1. \tag{14.22}$$

Izraz (14.22) jest jedandžba elipse u koordinatnom sustavu $O E'_b E'_s$. To znači da vrh rezultirajućeg vektora E^* opisuje elipsu kojoj su osi paralelne s osima četvrtvalne ploče. Ako je $\alpha = \pi/4$, bit će $\cos\alpha = \sin\alpha = \sqrt{2}/2$, pa izraz (14.22) prelazi u

$$(E'_b)^2 + (E'_s)^2 = E_0^2/2, \tag{14.23}$$

što znači da vektor svjetla u jednoj točki zrake opisuje kružnicu, a duž čitave zrake kružnu zavojnicu. Prema tome možemo zaključiti da svjetlo nakon prolaza kroz polaroidni filtar i četvrtvalnu ploču postaje eliptično polarizirano. Ako je kut između brze osi i osi polaroinog filtra jednak $\pi/4$, svjetlo nakon prolaza kroz četvrtvalnu ploču postaje kružno polarizirano.

Ako iza prve četvrtvalne ploče postavimo još jednu četvrtvalnu ploču, čije su osi okomite na osi prve ploče (tj. brza os druge okomita je na brzu os prve ploče), ona će poništiti djelovanje prve ploče, pa će svjetlo nakon prolaza kroz drugu ploču biti ravninski polarizirano s istom ravninom polarizacije.

Zamislimo sada da smo iza polaroidnog filtra postavili dvije četvrtvalne ploče tako da su im osi paralelne (brza os s brzom osi i spora os sa sporom osi) i da osi ploča čine kut od $\pi/4$ s osi polarizatora. U tom se slučaju djelovanje ploča zbraja i one se ponašaju kao jedna poluvalna ploča, tj. izazivaju kutnu retardaciju $\Delta = \pi$.

Vektor svjetla nakon izlaska iz polarizatora mijenja se po zakonu $E=E_0 \sin \omega t$. Kad dođe do prve četvrtvalne ploče, rastavlja se u dvije komponente: E_b i E_s, koje su dane izrazom

$$E_b = E \cos \pi/4, \qquad E_s = E \sin \pi/4$$

odnosno

$$E_b = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \sin \omega t$$

$$E_s = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \sin \omega t \qquad (14.24)$$

Te komponente titraju u međusobno okomitim ravninama. Dijeljenjem gornjih izraza dobit ćemo da je $E_b/E_s = 1$, odnosno $E_b = E_s$, što je jednadžba pravca u koordinatnom sustavu OE_bE_s. Taj je pravac paralelan s osi polarizatora. Nakon prolaza kroz obje četvrtvalne ploče spora komponenta E_s zaostaje za brzom za $\lambda/2$, odnosno za $\Delta = \pi$, pa je

$$E_b' = E_b = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \sin \omega t$$

$$E_s' = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \sin(\omega t - \pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \sin \omega t \qquad (14.25)$$

gdje su E_b' i E_s' komponente svjetla nakon izlaska iz druge četvrtvalne ploče. Ako ta dva izraza podijelimo, dobit ćemo

$$\frac{E_b'}{E_s'} = -1$$

odnosno

$$E_b' = -E_s'. \qquad (14.26)$$

U koordinatnom sustavu $OE_b'E_s'$ taj izraz predstavlja pravac koji je okomit na ulazni pravac $E_b = E_s$.

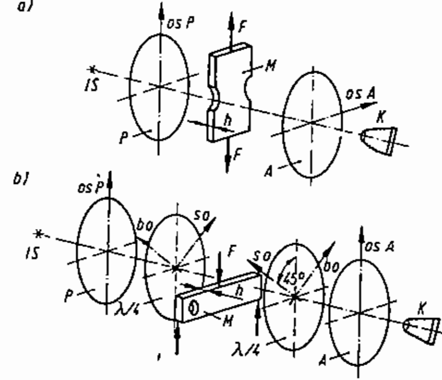
Na temelju toga možemo zaključiti da poluvalna ploča koja se nalazi iza polaroidnog filtra i čije osi čine kut od 45° zakreće ravninu polarizacije za 90°.

14.8. Tipovi polariskopa

Polariskop je optički uređaj u kojem se analiziraju fotoelastični modeli. Pomoću njega se zapravo mjeri promjena indeksa loma i na temelju toga zaključuje o raspodjeli naprezanja. U fotoelasticimetriji upotrebljavaju se dvije vrste polariskopa: polariskop s ravninski polariziranim svjetlom ili *planarni polariskop* te polariskop s kružno polariziranim svjetlom ili *cirkularni polariskop*.

Shema planarnog polariskopa prikazana je na slici 14.9a. Taj polariskop ima samo dva optička elementa, tj. dva polaroidna filtra. Prvi polaroidni filtar naziva se *polarizator*, a drugi *analizator*. Njihove su osi uvijek međusobno okomite. Osim polarizatora i analizatora polariskop ima još izvor svjetla koji stoji ispred polarizatora te fotografsku kameru, odnosno fotografski aparat koji stoji iza analizatora. Kako su osi polarizatora i analizatora međusobno okomite, svjetlo koje je prošlo kroz polarizator neće proći kroz analizator. Ako pogledamo kroz analizator prema izvoru svjetla, vidjet ćemo tamno polje, pa kažemo da je polariskop namješten na *tamno polje*. Model se u tom polariskopu postavlja između analizatora i polarizatora, kako je prikazano na slici 14.9a.

Shema cirkularnog polariskopa prikazana je na slici 14.9b. Taj polariskop ima četiri optička elementa: dva polaroidna filtra i dvije četvrtvalne ploče. Osi četvrtvalnih ploča uvijek čine kut od 45° s osima polarizatora i analizatora. Moguće su četiri postave takvog polariskopa. Kod dvije postave svjetlo slobodno prolazi od polarizatora kroz obje četvrtvalne ploče i zatim izlazi kroz analizator. U tom je slučaju vidno polje analizatora svijetlo, pa kažemo da je analizator postavljen na *svijetlo polje*. Ostale dvije postave polariskopa daju tamno polje. Model se u tom polariskopu postavlja između četvrtvalnih ploča.



Slika 14.9. Shematski prikaz polariskopa: a) planarnog, b) cirkularnog

U tablici 14.2 navedene su postave polariskopa koje daju tamno, odnosno svijetlo polje. Razmotrimo polariskop s okomitim četvrtvalnim pločama. Djelovanje ploča u tom se slučaju međusobno poništava, pa je nakon izlaska iz analizatora svjetlo ravninski polarizirano s ravninom polarizacije koja prolazi kroz os analizatora. Ako su sada osi analizatora i polarizatora paralelne, svjetlo slobodno prolazi kroz analizator, pa imamo svijetlo polje. Nasuprot tome, ako su osi analizatora i polarizatora okomite, analizator ne propušta svjetlo, pa imamo tamno polje.

Kad su četvrtvalne ploče paralelne, djeluju kao jedna poluvalna ploča, tj. zakreću ravninu polarizacije za $\pi/2$. Ako su sada osi polarizatora i analizatora okomite, imat ćemo svijetlo polje, a ako su paralelne, polje će biti tamno. Obje postave tamnog polja i obje postave svijetlog polja optički su ekvivalentne.

Tablica 14.2

Postave polariskopa

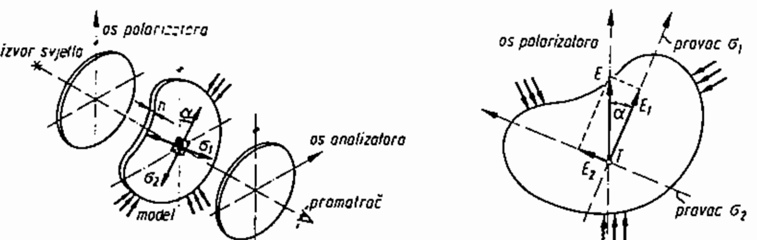
Polje	Polarizator i analizator	Četvrtvalne ploče
Svijetlo	Paralelni	Okomite
Tamno	Okomiti	Okomite
Svijetlo	Okomiti	Paralelne
Tamno	Paralelni	Paralelne

14.9. Analiza modela u planarnom polariskopu

Zamislimo da je neopterećen ravninski model postavljen u planarni polariskop prema slici 14.10. Ako je model ispravno izrađen, tj. bez početnih naprezanja, njegovo postavljanje u polariskop neće utjecati na izgled polja. Naime, ako pogledamo kroz analizator prema polarizatoru, vidno polje polariskopa bit će tamno i to neovisno o tome da li smo u polariskop postavili nenapregnut model. Ako sada model opteretimo, njegov materijal postaje dvoloman, što izaziva pojavu tamnih i svijetlih interferencijskih pruga. Naš je zadatak da dovedemo te pruge u vezu s raspodjelom naprezanja u modelu.

Kad svjetlo iz svog izvora prođe kroz polarizator, postaje ravninski polarizirano s ravninom polarizacije koja prolazi kroz os polarizatora. Vektor svjetla leži u ravnini polarizacije i njegova je veličina dana izrazom

$$E = E_0 \sin \omega t.$$



Slika 14.10. Analiza modela u planarnom polariskopu

Slika 14.11. Prolaz polariziranog svjetla kroz napregnuti model

Kad svjetlo dođe do modela, npr. do točke T, rastavlja se u dvije komponente: E_1 koja titra u smjeru σ_1 i E_2 koja titra u smjeru σ_2, kako je pokazano na slici 14.11. Veličina tih komponenata iznosi

$$E_1 = E_0 \cos \alpha = E_0 \cos \alpha \sin \omega t$$
$$E_2 = E_0 \sin \alpha = E_0 \sin \alpha \sin \omega t. \qquad (14.26)$$

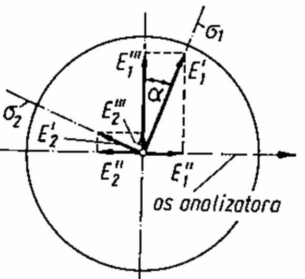
Komponenta E_1 brže prolazi kroz model nego komponenta E_2, pa nastaje kutna retardacija Δ. Kad komponente prođu kroz model, označit ćemo ih s E_1' i E_2', pa je

$$E_1' = E_0 \cos \alpha \sin\left(\omega t + \frac{\Delta}{2}\right)$$
$$E_2' = E_0 \sin \alpha \sin\left(\omega t - \frac{\Delta}{2}\right). \qquad (14.27)$$

Ovdje smo fazu brze komponente uvećali za $\Delta/2$, a fazu spore komponente umanjili za $\Delta/2$. Retardaciju Δ mogli smo raspodijeliti i na drugi način, npr. tako da smo brzu komponentu uvećali za Δ, a sporu ostavili nepromijenjenu.

Kad komponente E_1' i E_2' dođu do analizatora, rastavljaju se ponovo svaka u dvije komponente: E_1'' i E_2'', paralelno s osi analizatora, te E_1''' i E_2''' okomito na os analizatora. Analizator propušta komponente E_1'' i E_2'' i apsorbira komponente E_1''' i E_2'''. Prema slici 14.12 vrijedi

$$E_1'' = E_1' \sin \alpha$$
$$E_2'' = E_2' \cos \alpha. \qquad (14.28)$$



Slika 14.12. Prolaz svjetla kroz analizator

Kad uvrstimo (14.27) u gornji izraz, dobit ćemo

$$E_1'' = E_0 \cos \alpha \sin \alpha \sin\left(\omega t + \frac{\Delta}{2}\right)$$
$$E_2'' = E_0 \sin \alpha \cos \alpha \sin\left(\omega t - \frac{\Delta}{2}\right). \qquad (14.29)$$

Nakon prolaza kroz analizator komponente E_1'' i E_2'' sastavljaju se u jedinstven vektor svjetla E^*, pa je

$$E^* = E_1'' - E_2'' \qquad (14.30)$$

odnosno

$$E^* = E_0 \cos \alpha \sin \alpha \left[\sin\left(\omega t + \frac{\Delta}{2}\right) - \sin\left(\omega t - \frac{\Delta}{2}\right)\right]. \qquad (14.31)$$

$$E^* = E_0 \sin 2\alpha \sin \frac{\Delta}{2} \cos \omega t. \qquad (14.32)$$

Jakost svjetla I proporcionalna je kvadratu vektora svjetla, tj.

$$I = k\,(E^*)^2 \qquad (14.33)$$

odnosno

$$I = K \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\Delta}{2} \cos^2 \omega t. \qquad (14.34)$$

U onim točkama modela u kojima je $I=0$ imamo tamnu točku. Sve tamne točke spajaju se u interferencijske linije. Kako izraz (14.34) predstavlja umnožak triju faktora, jakost svjetla I može biti jednaka nuli u tri slučaja, koja ćemo pojedinačno analizirati.

a) **Učinak pravaca glavnih naprezanja.** Na temelju izraza (14.34) vidimo da je $I=0$ ako je $\sin 2\alpha = 0$, tj. ako je

$$2\alpha = n\pi \qquad n = 0, 1, 2, 3, \dots \qquad (14.35)$$

odnosno

$$\alpha = n\frac{\pi}{2} = 0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2 \dots \qquad (14.36)$$

Uvjet (14.36) bit će ispunjen kad je jedno od glavnih naprezanja σ_1 ili σ_2 paralelno s osi polarizatora. Sve točke u kojima je uvjet (14.36) ispunjen formiraju tamne interferencijske linije, koje se nazivaju *izokline*, tj. linije jednakog kuta glavnih naprezanja. Riječ dolazi od grčkog isos, što znači jednak, i kline, što znači nagib.

b) **Učinak razlike glavnih naprezanja.** Kad je

$$\frac{\Delta}{2} = n\pi, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \dots \qquad (14.37)$$

onda je također $I=0$. Usporedbom tog izraza s (14.18) vidimo da je

$$N = \frac{\Delta}{2\pi} = \frac{h}{f_\sigma}(\sigma_1 - \sigma_2) = n = 0, 1, 2, 3 \dots \qquad (14.38)$$

Odavde je

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N f_\sigma}{h} \qquad N = 0, 1, 2, 3 \dots \qquad (14.39)$$

Veličina N naziva se *red izokrome*, odnosno red interferencije. Interferencijske linije definirane izrazom (14.39) nazivaju se *izokrome*. Duž njih razlika je glavnih naprezanja konstantna i jednaka višekratniku veličine f_σ/h. Riječ izokroma dolazi od grčkih riječi isos i chroma = boja. Ako se model promatra u bijelom svjetlu, izokrome su linije jednake boje. U monokromatskom svjetlu izokrome su tamne linije.

c) **Učinak kružne frekvencije svjetla.** Prema izrazu (14.34) jakost svjetla jednaka je nuli ako je $\omega t = \pi(2n+1)/2$. Taj učinak vezan je za vrijeme, tj. slika se periodički

zatamnjuje i ostvjetljava. Frekvencija takvih promjena izvanredno je velika, pa je ni najbrže kamere ne mogu registrirati. Zbog toga taj efekt nema značenja u fotoelasticimetriji.

14.10 Analiza modela u cirkularnom polariskopu

Analiza napregnutog modela u cirkularnom polariskopu može se provesti slično kao i analiza modela u planarnom polariskopu, ali na mnogo opširniji način. Tu analizu nećemo provoditi, a može se naći u navedenoj literaturi. Ovdje ćemo navesti samo konačan izraz za rezultirajući vektor svjetla nakon prolaza kroz sve elemente cirkularnog polariskopa i kroz sam model. To ćemo napraviti za obje postave polariskopa, naime i za tamno i za svijetlo polje.

a) **Tamno polje**

Vektor svjetla nakon izlaska iz analizatora prikazan je izrazom

$$E^* = E_0 \sin\frac{\Delta}{2} \cos\left(\omega t - \frac{\Delta}{2} - 2\gamma\right). \qquad (14.40)$$

Ovdje je $\gamma = \pi/4 - \alpha$ kut definiran u toku izvođenja, a α kut koji pravac σ_1 čini s osi polarizatora. Jakost svjetla iznosi

$$I = k\,(E^*)^2 = K \sin^2\frac{\Delta}{2} \cos^2\left(\omega t - \frac{\Delta}{2} - 2\gamma\right). \qquad (14.41)$$

Interferencijska linija nastaje kad je jakost svjetla jednaka nuli, tj. kad je $I=0$. To je moguće u dva slučaja: ako je $\sin\frac{\Delta}{2}=0$, ili ako je $\cos\left(\omega t - \frac{\Delta}{2} - 2\gamma\right)=0$. Kako se taj drugi izraz mijenja vrlo velikom frekvencijom ω (red veličine 10^{14} Hz), on nema značenja u fotoelasticimetriji. Prvi je izraz istovjetan s uvjetom (14.35), pa će dati isti rezultat, tj. u svim onim mjestima u kojima je $\sin(\Delta/2)=0$ vrijedi

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N f_\sigma}{h}, \qquad (14.42)$$

gdje je $N = 0, 1, 2, \dots$ red izokrome.

b) **Svijetlo polje**

U tom je slučaju rezultirajući vektor svjetla dan izrazom

$$E^* = E_0 \sin\left(\omega t - \frac{\Delta}{2}\right) \cos\frac{\Delta}{2}, \qquad (14.43)$$

pa je jakost svjetla I:

$$I = k\,(E^*)^2 = K \sin^2\left(\omega t - \frac{\Delta}{2}\right) \cos^2\frac{\Delta}{2}. \qquad (14.44)$$

Prvi faktor $\sin(\omega t - \Delta/2)$ zbog velike frekvencije ne treba razmatrati. Drugi faktor u izrazima (14.44) dat će $I=0$, ako je

$$\cos\frac{\Delta}{2}=0, \tag{14.45}$$

odnosno kad je

$$\frac{\Delta}{2}=\frac{2n+1}{2}\pi \qquad n=0,1,2,3\ldots \tag{14.46}$$

Odavde je

$$\frac{\Delta}{2\pi}=N=\frac{2n+1}{2}=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\ldots \tag{14.47}$$

Usporedbom tog izraza s (14.18) dobit ćemo opet

$$\sigma_1-\sigma_2=\frac{Nf_\sigma}{h} \qquad N=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\ldots \tag{14.48}$$

Na temelju svega što je dosada izloženo možemo zaključiti ovo:

1. U planarnom polariskopu dobivamo dvije vrste interferencijskih linija: izokrome i izokline. Izokrome određuju razliku glavnih naprezanja, a izokline pravce glavnih naprezanja,

2. U cirkularnom polariskopu dobivamo samo izokrome; međutim, one mogu biti snimljene u tamnom ili svijetlom polju,

3. Neovisno o tome jesu li izokrome snimljene u ravninski polariziranom ili kružno polariziranom svjetlu u tamnom ili svijetlom polju jednadžba izokroma uvijek glasi

$$\sigma_1-\sigma_2=\frac{Nf_\sigma}{h}.$$

Izokrome snimljene u tamnom polju su cjelobrojne, tj. $N=0,1,2,3,\ldots$ Izokrome snimljene u svijetlom polju imaju polovičan red, tj. $N=1/2,\ 3/2,\ 5/2,\ 7/2$.

4. Stanje naprezanja u svakoj točki ravninskog modela zadano je s tri podatka: tri komponente naprezanja: σ_x, σ_y, $\tau_{xy}=\tau_{yx}$ ili pomoću dva glavna naprezanja: σ_1, σ_2 i pravcem glavnih naprezanja α. Fotoelastični eksperiment daje nam samo dva podatka: razliku glavnih naprezanja $\sigma_1-\sigma_2$ i pravce glavnih naprezanja. Prema tome ne možemo neposredno pomoću fotoelastičnog eksperimenta odrediti stanje naprezanja u svakoj točki modela. To možemo učiniti posredno pomoću metoda razdvajanja (separacije) glavnih naprezanja, o čemu neće biti ovdje govora,

5. Na rubu modela jedno je glavno naprezanje poznato. Naprezanje paralelno s rubom označit ćemo sa σ_t, a ono okomito na rub sa σ_n. To su glavna naprezanja, pa vrijedi

$$\sigma_1-\sigma_2=\sigma_t-\sigma_n=\frac{Nf_\sigma}{h}.$$

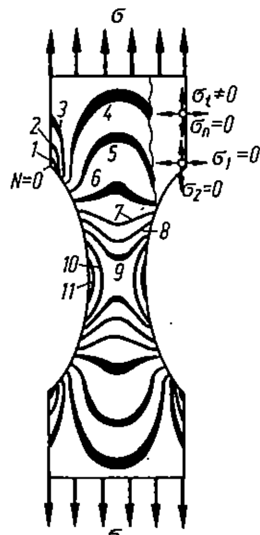
Vrlo je često, gotovo uvijek, $\sigma_n=0$, pa gornji izraz prelazi u

$$\sigma_t=\frac{Nf_\sigma}{h}. \tag{14.49}$$

Kako su nam debljina modela h i konstanta f_σ poznate, potrebno je još odrediti red izokrome N da bi se odredilo naprezanje σ_t.

6. Red izokrome možemo odrediti brojanjem izokroma na fotografiji modela. Vrlo je važno odrediti nultu izokromu ($N=0$). Ako model ima oštar rub, kao na slici 14.13, u njemu je $\sigma_1=\sigma_2=0$, pa je $N=0$. Pri brojanju izokroma trebamo imati ovo na umu:

- Dvije susjedne izokrome istog su reda ili se razlikuju za jedinicu.
- Izokrome raznih redova ne mogu se sjeći.
- Izokrome nultog reda često se javljaju u obliku tamne točke.



Slika 14.13. Brojanje izokroma na fotografiji modela

14.11. Ilustracija raspodjele naprezanja pomoću fotoelastičnih modela

Fotografije fotoelastičnih modela mogu nam poslužiti za ilustraciju raspodjele naprezanja u raznim opterećenim dijelovima konstrukcija. Ovdje ćemo ilustrirati raspodjelu naprezanja u štapovima koji su opterećeni osno i na savijanje, i to čisto i poprečno savijanje te savijanje debelog zakrivljenog štapa. Pomoću nekoliko modela ilustrirat ćemo St. Venantov princip i koncentraciju naprezanja.

Osno opterećenje štapa. U sedmom poglavlju pokazali smo da je u osno opterećenom štapu naprezanje jednoliko raspodijeljeno po presjeku štapa i iznosi

$$\sigma_x=\frac{N}{A}=\pm\frac{F}{A}.$$

Ostale komponente naprezanja jednake su nuli. Glavna naprezanja u štapu iznose:

$$\sigma_1=\frac{F}{A}, \qquad \sigma_2=0 \qquad \text{za rastezanje}$$

$$\sigma_1=0, \qquad \sigma_2=-\frac{F}{A} \qquad \text{za sabijanje.}$$

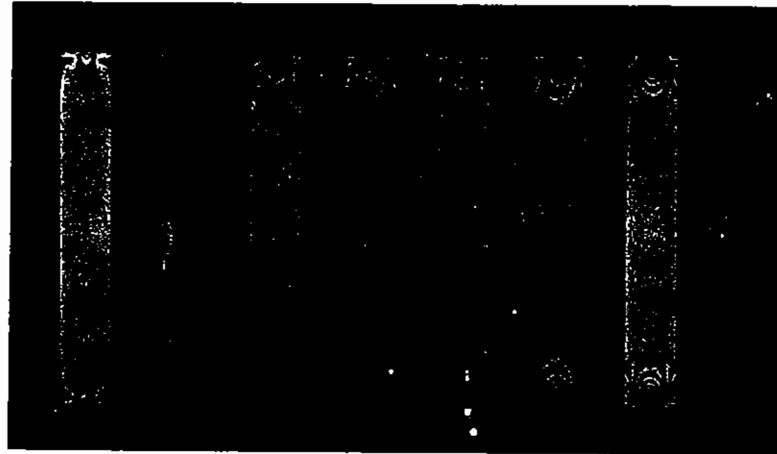
U oba slučaja izraz (14.39) prelazi u

$$\frac{F}{A}=N\frac{f_\sigma}{h}, \tag{14.50}$$

odnosno

$$N=\frac{hF}{Af_\sigma}. \tag{14.51}$$

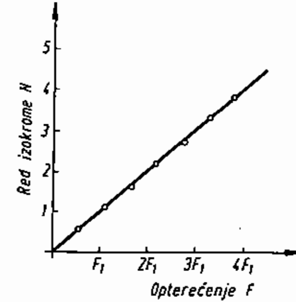
Raspodjela naprezanja prema ovom izrazu ilustrirana je pomoću fotografija na slici 14.14. Na slici je prikazan niz prizmatičnih štapova koji su osno opterećeni dvjema silama F na sabijanje. Sve fotografije snimljene su u tamnom polju, pa izokrome N imaju red 0, 1, 2, 3 itd.



Slika 14.14. Ilustracija raspodjele naprezanja u štapu koji je opterećen s dvije sile na sabijanje. Poremećaj izokroma prostire se samo na udaljenosti b od ruba, koja udaljenost je jednaka širini štapa

Izraz (14.51) pokazuje da će red izokroma biti jednak jedinici kad sila F postigne neku vrijednost $F=F_1=\frac{Af_\sigma}{h}$. Kad sila postigne vrijednost $2F_1$, bit će red izokrome $N=2$ itd.

Na slici 14.15 prikazana je ovisnost reda izokrome N o opterećenju štapa F. Dok je štap neopterećen ($F=0$), on je potpuno taman jer je u čitavu štapu red izokroma jednak nuli ($N=0$). Pri postepenom povećanju sile F štap postaje svjetliji i kad sila dostigne vrijednost $F=F_1/2=Af_\sigma/2h$, čitav štap, osim rubnih dijelova, postaje svijetao. Daljnjim povećanjem opterećenja štap postaje sve tamniji. Pri vrijednosti $F=F_1$ postaje taman jer je sada $N=1$. Kad opterećenje postane jednako $2F_1$, $3F_1$, itd., red izokrome je $N=2, 3$ itd. Sve to odnosi se na čitav štap osim krajeva u kojima raspodjela naprezanja nije jednolika, pa se po presjeku javljaju izokrome različitih redova. U poglavlju 7.6 pokazano je da prelazno područje odgovara približno jednoj širini štapa, što fotografije i potvrđuju.



Slika 14.15. Ovisnost reda izokrome N o sili F u štapu sa slike 14.14

Dijagram na slici 14.15 može nam poslužiti za baždarenje fotoelastične konstante. Naime, u izrazu (14.51) poznate su nam veličine h, A i F, a za odgovarajuću vrijednost F možemo iz dijagrama očitati N, a zatim izračunati fotoelastičnu konstantu pomoću izraza

$$f_\sigma=\frac{hF}{NA}. \tag{14.52}$$

Čisto savijanje štapa. U tom je slučaju naprezanje σ_x dano izrazom

$$\sigma_x=\frac{M_y}{I_y}z.$$

Ostala dva naprezanja jednaka su nuli, tj. $\sigma_y=\sigma_z=0$. Glavna naprezanja jesu:

$$\sigma_1=\sigma_x=\frac{M_y}{I_y}z, \qquad \sigma_2=\sigma_z=0 \qquad z>0$$

$$\sigma_1=\sigma_z=0, \qquad \sigma_2=\frac{M_y}{I_y}z=-\frac{M_y}{I_z}|z| \qquad z<0$$

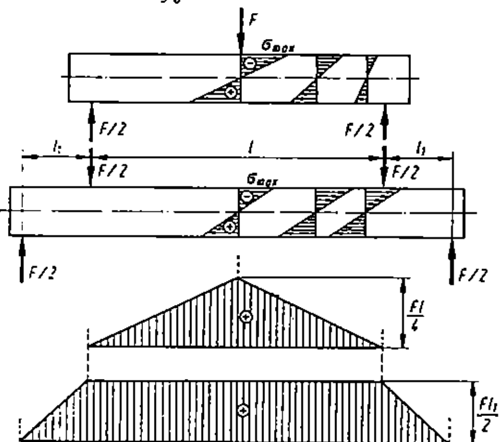
pa je

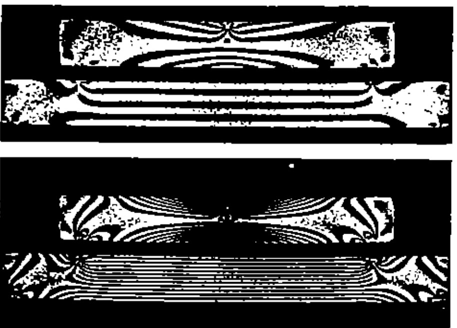
$$\sigma_1-\sigma_2=\frac{M_y}{I_y}|z|=\frac{Nf_\sigma}{h} \tag{14.53}$$

u čitavu presjeku štapa. Sređivanjem gornjeg izraza možemo dobiti

$$N=\frac{hM_y}{f_\sigma I_y}|z|=C|z|, \tag{14.54}$$

gdje je $C = h M_y / I_y f_\sigma$ konstanta. U skladu s izrazom (14.54) vidimo da je red izokrome u neutralnoj površini jednak nuli jer je $z=0$ i da linearno raste prema krajevima. Također vidimo da red izokrome ne ovisi o koordinati x, pa su izokrome paralelne s uzdužnom osi štapa, tj. s osi x. To se naravno odnosi na područje čistog savijanja, tj. područje u kome je $M_y = F l_1 =$ konst. To područje jest središnji dio donjeg štapa. Na slici 14.16 prikazane su dvije fotografije štapova. Gornja fotografija odnosi se na niže opterećenje, a donja na više. Zbog toga je broj izokroma na donjoj fotografiji veći. Pomoću epruvete opterećene na čisto savijanje također se određuje fotoelastična konstanta f_σ.





Slika 14.16. Ilustracija naprezanja u štapu opterećenom na savijanje. Gornji štap opterećen je na poprečno savijanje, a donji na čisto savijanje

Poprečno savijanje. Kod poprečnog savijanja moment savijanja M_y nije konstantan, tj. ovisi o koordinati x, pa i naprezanje σ_x ovisi o koordinati x. Zbog toga izokrome nisu paralelne s osi štapa, što se dobro vidi na fotografiji štapa. Kako se moment savijanja mijenja linearno s koordinatom x, to se i naprezanje σ_x mijenja linearno duž gornjeg i donjeg ruba štapa, pa se i red izokrome N mijenja linearno. Najveću vrijednost red izokrome postiže na mjestu gdje djeluje opterećenje F. U sredini štapa

red izokrome nije jednak nuli kao kod čistog savijanja jer razlika glavnih naprezanja $\sigma_1 - \sigma_2$ nije jednaka nuli, iako su normalna naprezanja σ_x i σ_z jednaka nuli. Naime, u neutralnoj osi djeluje posmično naprezanje

$$\tau_{max} = \frac{3Q}{2A} = \frac{3F}{4A}.$$

Kako je element u osi štapa opterećen na čisto smicanje, glavna naprezanja iznose:

$$\sigma_1 = \tau_{max} = \frac{3F}{4A}, \qquad \sigma_2 = -\tau_{max} = -\frac{3F}{4A},$$

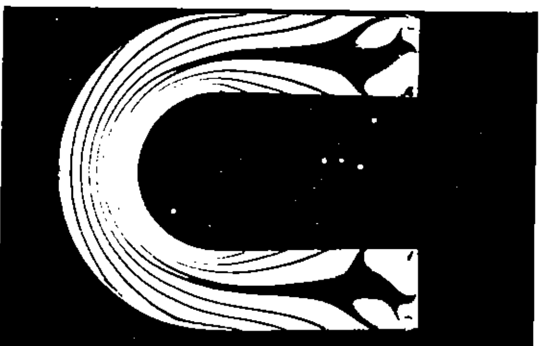
pa je

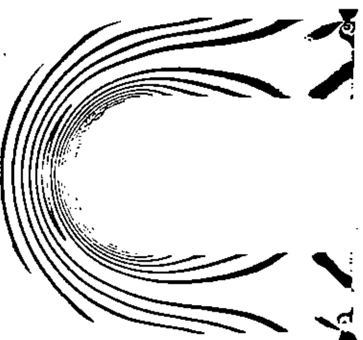
$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{3F}{2A} = \frac{N f_\sigma}{h}, \tag{14.55}$$

odnosno

$$N = \frac{3F h}{2A f_\sigma}. \tag{14.56}$$

Savijanje debelog zakrivljenog štapa. Na slici 14.17 prikazane su fotografije debelog zakrivljenog štapa. Obje fotografije snimljene su u kružnopolariziranom svjetlu, pa





Slika 14.17. Savijanje debelog zakrivljenog štapa. Gornja fotografija snimljena je u tamnom polju, a donja u svijetlom polju

se na njima nalaze samo izokrome. Gornja fotografija snimljena je u tamnom polju, a donja u svijetlom. To možemo zaključiti prema pozadini modela. Ako je model snimljen u svijetlom polju, pozadina je svijetla, a ako je snimljen u tamnom polju, pozadina je tamna. U poglavlju 9.11 razmatrali smo savijanje debelog zakrivljenog štapa. Vidjeli smo da se neutralna os pomiče prema središtu zakrivljenosti i da su naprezanja raspoređena po zakonu hiperbole.

Poprečni presjek zakrivljenog štapa na slici 14.17 jest pravokutnik, pa bismo u slučaju ravnog štapa očekivali da je neutralna os u sredini. Kako se vidi na fotografiji, neutralna os (tj. red izokrome $N=0$) znatno je pomaknuta prema središtu zakrivljenosti. To se desilo ne samo zbog toga što je štap zakrivljen, nego i zbog toga što je središnji dio štapa opterećen istovremeno na tlak i na savijanja. Na fotografijama se dobro vidi da red izokrome raste sve brže i brže kako idemo prema unutrašnjem rubu, odnosno sve sporije kako idemo prema vanjskom rubu poprečnog presjeka, što je u skladu s hiperboličnom raspodjelom naprezanja.

Koncentracija naprezanja. Na slici 14.18 prikazane su četiri fotografije štapa s različitim geometrijskim diskontinuitetima, kako slijedi:

a) Štap s dva polukružna utora opterećen na rastezanje. Širina štapa je $w=5$ cm, a polumjer utora $r=2,5$ cm.

b) Štap iste širine s dva plitka kružna utora polumjera $r=6,5$ cm. Štap je također opterećen na rastezanje.

c) Štap iste širine s eliptičnim otvorom koji ima poluosi $a=1,9$ cm i $b=1,25$ cm. Štap je opterećen na rastezanje.

d) Štap kao pod c) ali opterećen na čisto savijanje.

Na temelju tih fotografija možemo zaključiti ovo:

Oko geometrijskih diskontinuiteta (otvora, utora itd.) stvara se povećan broj izokroma koje se međusobno približuju, što znači da dolazi do koncentracije naprezanja. Taj se poremećaj gubi na udaljenosti od diskontinuiteta, koja je približno jednaka jednoj širini štapa. To je u skladu sa St. Venantovim principom. U prva tri štapa na mjestu gdje nema poremećaja treba po čitavu presjeku biti isti red izokroma. U štapu na slici 14.18d (u području izvan poremećaja) red izokrome u sredini je jednak nuli i raste prema krajevima presjeka. Izókrome su paralelne s osi štapa jer je štap opterećen na čisto savijanje.

Faktori koncentracije naprezanja K i K_n kod štapa koji je opterećen osno definirani su izrazom

$$K=\frac{\sigma_{max}}{\sigma_0}, \text{ odnosno } K_n=\frac{\sigma_{max}}{\sigma_n}, \tag{14.57}$$

gdje je σ_{max} najveće naprezanje na diskontinuitetu, σ_0 naprezanje u neoslabljenom dijelu daleko od diskontinuiteta, a σ_n nominalno naprezanje u najužem dijelu. Kako se σ_{max} javlja na rubu, bit će

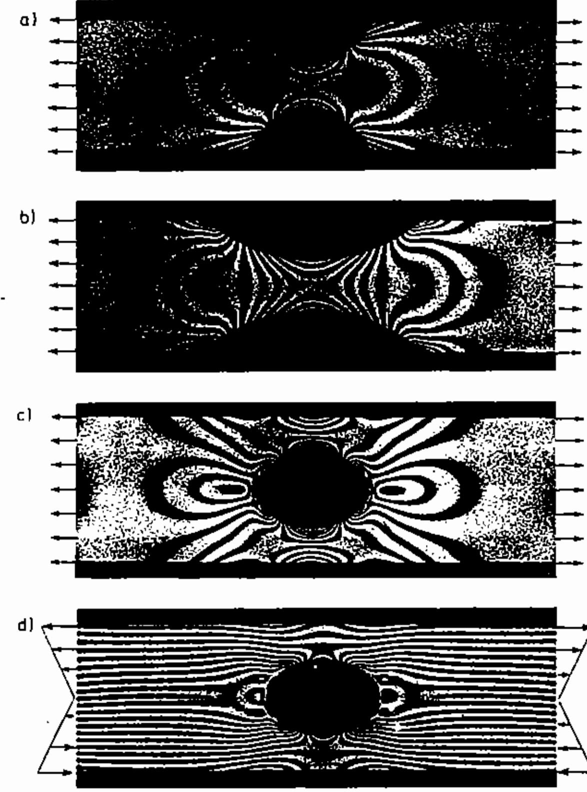
$$\sigma_{max}=\frac{N_{max}f_\sigma}{h}. \tag{14.58}$$

Isto je tako

$$\sigma_0=\frac{N_0 f_\sigma}{h} \tag{14.59}$$

jer je na mjestu koje je udaljeno od otvora $\sigma_1=\sigma_0$ i $\sigma_2=0$. Odavde lako možemo dobiti

$$K=\frac{\sigma_{max}}{\sigma_0}=\frac{N_{max}}{N_0}. \tag{14.60}$$

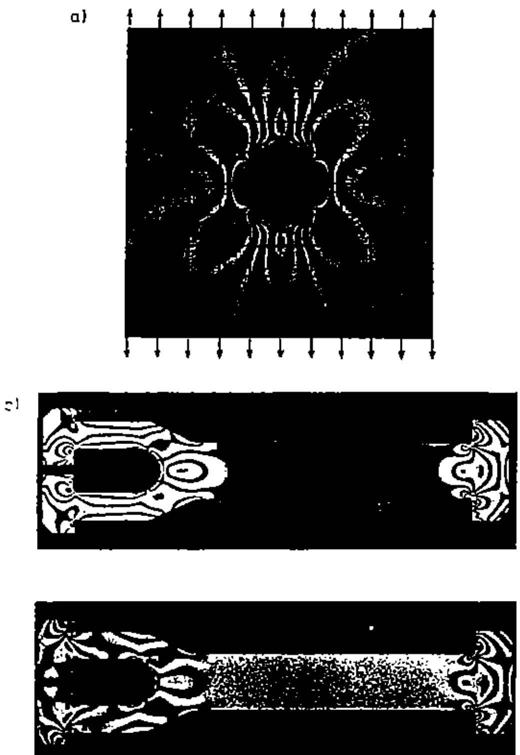


Slika 14.18. Ilustracija koncentracije naprezanja i St. Venantova principa

Kod prvog je štapa $N_{max}=11,6$ i $N_0 \doteq 3,67$, a kod drugog $N_{max}=15,4$ i $N_0=5,5$, pa je faktor koncentracije naprezanja u prvom slučaju $K=3,16$, a u drugom $K=2,8$. Kao što vidimo, u slučaju manjeg polumjera zaobljenja utora koncentracija je naprezanja veća. Kod tih je modela $h=1$ cm i $f_\sigma=1,09$ MN/m, pa na rubu, gdje je $N=1$, naprezanje iznosi $\sigma_t=1,09$ MPa. Tamo gdje je red izokrome $N=2$, $\sigma_t=2,18$ MPa itd.

Gornja fotografija na slici 14.19 prikazuje široku ploču s kružnim otvorom koja je opterećena na rastezanje u smjeru gore – dolje.

Dvije donje fotografije prikazuju kotvene ploče ekscentarskih preša. Uočavamo opet da se po St. Venantovu principu utjecaj ruba brzo gubi i da je u srednjem dijelu ploče raspored naprezanja po presjeku konstantan. Vrlo mali polumjeri zaobljenja u donjem dijelu izazivaju vrlo veliku koncentraciju naprezanja, što znači da pri konstruiranju treba odabrati što je moguće veće polumjere zaobljenja.



Slika 14.19. Ilustracija koncentracije naprezanja: a) u beskonačnoj ploči s kružnim otvorom, b) u kotvenoj ploči ekscentarske preše

14.12. Tenzometrija

Naprezanja i deformacije ne možemo mjeriti. Umjesto njih mjerimo neke druge veličine koje ovise o naprezanju, odnosno o deformaciji, pa zatim računski dolazimo do veličine naprezanja i deformacije. Tako se u fotoelasticimetriji mjeri optička anizotropija, tj. promjena indeksa loma. Kako promjena indeksa loma ovisi o razlici glavnih naprezanja, možemo zaključiti kakva je promjena razlike glavnih naprezanja.

Sličnu situaciju imamo i kod mjerenja deformacije. U tom slučaju mjeri se produljenje Δl između dviju točaka A i B koje su prije deformiranja bile udaljene za iznos l. Ta udaljenost se naziva mjerna duljina. Po definiciji srednja je deformacija dana izrazom

$$\varepsilon_{sr} = \frac{\Delta l}{l}.$$

Ako se deformacija mijenja linearno ili je konstantna, onda je prava deformacija na sredini mjerne dužine AB jednaka srednjoj deformaciji. Međutim, ako se deformacija mijenja po bilo kojem drugom zakonu, srednja deformacija ε_{sr} na mjernoj duljini razlikuje se od prave deformacije na sredini mjerne duljine. Svi poznati tenzometri (mjerači deformacije) zapravo mjere srednju deformaciju. Zbog toga treba mjernu duljinu l uzimati što manju. S druge strane što je manji l, bit će manji i Δl. Kod vrlo malog Δl njegovo mjerenje postaje nesigurno, pa bi zbog toga trebala mjerna duljina, a time i produljenje, biti što veći.

U praksi se usvaja kompromisno rješenje. Na velikim konstrukcijama kao što su zgrade, mostovi, dizalice i sl. upotrebljavaju se tenzometri koji imaju veću mjernu duljinu od 10 cm, pa i više. U tom slučaju mogu se upotrijebiti i tenzometri manje preciznosti, npr. mehanički tenzometri. Na manjim konstrukcijama i strojevima mjerna duljina mora biti bitno manja, obično reda veličine 1 cm. Ako se radi u području nagle promjene naprezanja i deformacija, npr. u blizini koncentracije naprezanja, mjerna duljina iznosi samo nekoliko milimetara. Tada se moraju upotrijebiti vrlo precizni tenzometri. Redovno se koriste elektrootpornički tenzometri.

Produljenje Δl možemo mjeriti direktno mehanički ili indirektno mjerenjem neke druge veličine. Prema principu koji se upotrebljava razlikujemo ove tipove tenzometara:

- mehaničke,
- akustičke,
- optičke,
- električne.

Električne tenzometre dijelimo na:

- elektrootporničke,
- elektrokapacitivne,
- elektroinduktivne.

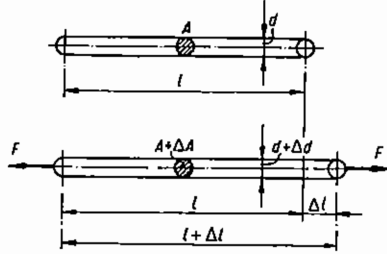
Danas se u tehnici najviše upotrebljavaju elektrootpornički tenzometri, pa ćemo se njima podrobnije upoznati.

14.13. Elektrootpornički tenzometri

Žica duljine l i poprečnog presjeka A ima omski električni otpor R koji se može izračunati pomoću izraza

$$R = \rho \frac{l}{A}, \qquad (14.61)$$

gdje je ρ električna otpornost (specifični otpor) materijala od kojeg je izrađena žica. Takva žica promjera d prikazana je na slici 14.20.



Slika 14.20. Žici koja se produlji Δl povećava se električni otpor

Ako žicu produljimo za iznos Δl, istovremeno će se poprečni presjek smanjiti za iznos $-\Delta A$, pa će se električni otpor promijeniti za iznos ΔR. Shvatimo li otpor R kao funkciju triju veličina: ρ, A i l, totalni diferencijal $\mathrm{d}R$ bit će

$$\mathrm{d}R=\frac{\partial R}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho+\frac{\partial R}{\partial l}\mathrm{d}l+\frac{\partial R}{\partial A}\mathrm{d}A$$

$$\mathrm{d}R=\frac{l}{A}\mathrm{d}\rho+\frac{\rho}{A}\mathrm{d}l-\frac{\rho l}{A^2}\mathrm{d}A.$$

Ako taj izraz podijelimo s (14.61) i sredimo, dobit ćemo

$$\frac{\mathrm{d}R}{R}=\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}+\frac{\mathrm{d}l}{l}-\frac{\mathrm{d}A}{A} \tag{14.62}$$

odnosno

$$\frac{\Delta R}{R}\approx\frac{\Delta\rho}{\rho}+\frac{\Delta l}{l}-\frac{\Delta A}{A}. \tag{14.63}$$

Za žicu kružnog presjeka promjera d vrijedi $A=\pi d^2/4$. Također je $\Delta d/d=\varepsilon_q$ i $\Delta l/l=\varepsilon$, pa je prema Hookeovu zakonu (6.5)

$$\frac{\Delta d}{d}=-\nu\frac{\Delta l}{l}.$$

Kad sve to uzmemo u obzir i uvrstimo u (14.63), pa zatim sredimo, dobit ćemo

$$\frac{\Delta R}{R}=(1+2\nu)\,\varepsilon+\frac{\Delta\rho}{\rho} \tag{14.64}$$

odnosno

$$\frac{\Delta R/R}{\varepsilon}=1+2\nu+\frac{\Delta\rho/\rho}{\varepsilon}=k, \tag{14.65}$$

gdje je k *faktor tenzometra*.

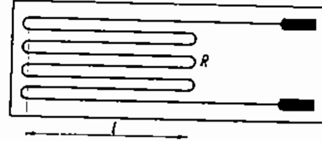
Kad bismo dobro poznavali ovisnost promjene otpornosti ρ o deformaciji, mogli bismo faktor k odrediti teorijski. On se, međutim, u praksi određuje

baždarenjem. Kad nam je poznat faktor tenzometra k i promjena otpora žice $\Delta R/R$, možemo odrediti deformaciju pomoću izraza

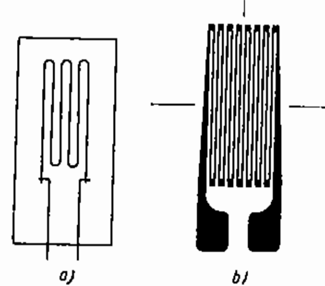
$$\varepsilon=\frac{1}{k}\frac{\Delta R}{R}. \tag{14.66}$$

14.14. Izvedba i primjena elektrootporničkih tenzometara

Ako žicu sa slike 14.20 čvrsto zalijepimo za površinu neopterećene konstrukcije, pa zatim konstrukciju opteretimo, konstrukcija će se deformirati, a s njom i žica. Deformacija žice bit će jednaka deformaciji površine na koju je zalijepljena. Deformacija žice izaziva promjenu otpora, pa mjerenjem promjene električnog otpora u žici možemo izmjeriti njenu deformaciju. Mjereći deformaciju žice mjerimo zapravo deformaciju na površini konstrukcije. U toku mjerenja kroz žicu teče električna struja. Da bi struja bila ograničena, a i zbog drugih razloga, otpor R žice mora imati određenu vrijednost. Najčešće je $R=120\,\Omega$. Zbog toga žica mora imati duljinu l koja je redovno prevelika da bi se upotrijebila kao mjerna duljina, pa se žica namota u obliku mrežice, kako je pokazano na slici 14.21. Mrežica se lijepi između dva tanka papira koji služe kao izolatori i ujedno štite mrežicu. Danas se uglavnom upotrebljavaju folijski tenzometri koji se izrađuju fotonagrizanjem tanke folije metala. Folijski tenzometar prikazan je na slici 14.22.



Slika 14.21. Elektrootpornički tenzometar sa žičanom mrežicom



Slika 14.22. Elektrootpornički folijski tenzometar: a) žičani, b) folijski

Opisani tip tenzometra može se primijeniti kod linearnog (jednoosnog) stanja naprezanja. Tada je naprezanje dano Hookeovim zakonom

$$\sigma=\varepsilon E.$$

Takvo stanje naprezanja nastaje kod osnog opterećenja i kod savijanja.

Ako ispitujemo konstrukciju u kojoj vlada ravninsko stanje naprezanja, potrebna su nam barem dva tenzometra, i to ako su nam poznati pravci glavnih naprezanja. Kod ispitivanja osnosimetričnih posuda pod tlakom poznati su nam pravci glavnih naprezanja. U slučaju ispitivanja s dva tenzometra, koji su postavljeni međusobno okomito

Struja i određena je Ohmovim zakonom i iznosi

$$i=\frac{U}{R_1+R_2}, \tag{14.74}$$

što uvršteno u izraz (14.73) daje

$$E=\frac{R_1}{R_1+R_2}U. \tag{14.75}$$

Slika 14.25. a) Potenciometar, b) Wheatstoneov most

Ako se otpori R_1 i R_2 promijene za iznos $\Delta R_1+\Delta R_2$, promijenit će se i izlazni napon za iznos ΔE, pa će biti

$$E+\Delta E=\frac{R_1+\Delta R_1}{R_1+\Delta R_1+R_2+\Delta R_2}U. \tag{14.76}$$

Ako od izraza (14.76) oduzmemo (14.75) i sredimo, dobit ćemo

$$\Delta E=\left[\frac{R_1+\Delta R_1}{R_1+\Delta R_1+R_2+\Delta R_2}-\frac{R_1}{R_1+R_2}\right]U. \tag{14.77}$$

Uvođenjem oznake $r=R_2/R_1$ gornji izraz možemo napisati u obliku

$$\Delta E=\frac{[r/(1+r^2)]\ (\Delta R_1/R_1-\Delta R_2/R_2)}{1+[1/(1+r^2)][\Delta R_1/R_1-r(\Delta R_2/R_2)]} \tag{14.78}$$

odnosno

$$\Delta E=\frac{r}{(1+r)^2}\left(\frac{\Delta R_1}{R_1}-\frac{\Delta R_2}{R_2}\right)(1-\eta)U, \tag{14.79}$$

gdje je

$$\eta=1-\frac{1}{1+[1/(1+r)][\Delta R_1/R_1+r(\Delta R_2/R_2)]}. \tag{14.80}$$

Nelinearni član η vrlo je malen i može se zanemariti u području malih deformacija, ali ga treba uzeti u obzir u području velikih deformacija.

Pri mjerenju obično se uzima $R_2=\text{konst.}$, $R_1=R_T$ i $\Delta R_1=\Delta R_T$. U tom je slučaju

$$\Delta E=\frac{r}{(1+r)^2}\frac{\Delta R_T}{R_T}U. \tag{14.81}$$

Mjereći promjenu izlaznog napona ΔE, možemo mjeriti promjenu otpora tenzometra $\Delta R_T/R_T$, a zatim pomoću izraza (14.66) odrediti deformaciju ε koju mjeri tenzometar.

Kod Wheatstoneova (Vistonovog) mosta pad napona između točaka A i B iznosi U_{AB}. Pad napona između A i D jest

$$U_{AD}=\frac{R_1}{R_1+R_2}U, \tag{14.82}$$

dok je pad napona između A i C dan izrazom

$$U_{AC}=\frac{R_4}{R_3+R_4}U. \tag{14.83}$$

Sada je razlika napona između točaka C i D jednaka izlaznom naponu E, tj.

$$E=U_{CD}=U_{AD}-U_{AC}. \tag{14.84}$$

Kad uvrstimo izraze (14.82) i (14.83) u (14.84) i sredimo, dobit ćemo

$$E=\frac{R_1R_3-R_2R_4}{(R_1+R_2)+(R_3+R_4)}U. \tag{14.85}$$

Na početku mjerenja dovodimo most u ravnotežu, tj.

$$R_1R_3=R_2R_4 \tag{14.86}$$

odnosno

$$R_1:R_2=R_4:R_3. \tag{14.86a}$$

Ako se otpori R_1, R_2, R_3 i R_4 promijene za iznos ΔR_1, ΔR_2, ΔR_3 i ΔR_4, izlazni napon ΔE bit će

$$\Delta E=\frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)^2}\left(\frac{\Delta R_1}{R_1}-\frac{\Delta R_2}{R_2}+\frac{\Delta R_3}{R_3}-\frac{\Delta R_4}{R_4}\right). \tag{14.87}$$

Taj je izraz izveden uz pretpostavku da je u početku most bio uravnotežen, tj. da je ispunjen uvjet (14.86).

Wheatstoneov most možemo upotrijebiti s jednim, dva ili četiri aktivna tenzometra. Ako imamo jedan aktivan tenzometar, npr. $R_3=R_T$, izlazni je napon dan izrazom

$$\Delta E=\frac{r}{(1+r)^2}\cdot\frac{\Delta R_T}{R_T}, \tag{14.88}$$

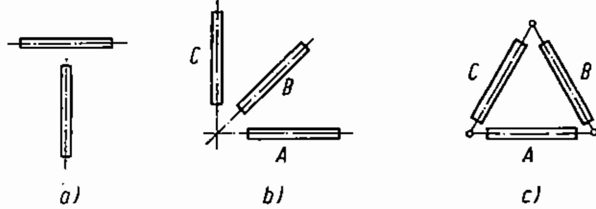
gdje je $r=R_2/R_1$.

kao na slici 14.23a, određujemo glavne deformacije: ε_1 i ε_2, a zatim pomoću Hookeova zakona (6.11) i glavna naprezanja:

$$\sigma_1=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1+\nu\varepsilon_2)$$

$$\sigma_2=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2-\nu\varepsilon_1).$$

Kad imamo ravninsko stanje naprezanja i kad nam nisu poznati pravci glavnih naprezanja, potrebno je mjeriti deformacije u tri smjera: A, B i C, kako je prikazano na slici 14.23b i c. Znajući tri deformacije: ε_A, ε_B i ε_C, možemo, slično kao u primjeru 3.3, odrediti glavne deformacije, a zatim i glavna naprezanja.



Slika 14.23. Tipovi tenzometarskih rozeta: a) rozeta T, b) rozeta K, c) rozeta Δ (delta)

Za pravokutnu rozetu, prema slici 14.23b, glavne deformacije iznose

$$\varepsilon_{1,2}=\frac{1}{2}\left[\varepsilon_A+\varepsilon_C\pm\sqrt{(\varepsilon_A-\varepsilon_C)^2+(2\varepsilon_B-\varepsilon_A-\varepsilon_C)^2}\right]. \tag{14.67}$$

Glavna naprezanja u tom su slučaju dana izrazom

$$\sigma_{1,2}=\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left[(1+\nu)(\varepsilon_A+\varepsilon_C)\pm(1-\nu)\sqrt{(\varepsilon_A-\varepsilon_C)^2+(2\varepsilon_B-\varepsilon_A-\varepsilon_C)^2}\right]. \quad (14.68)$$

Kut glavne deformacije ε_1 iznosi

$$\tan 2\varphi_1=\frac{2\varepsilon_B-\varepsilon_A-\varepsilon_C}{\varepsilon_A-\varepsilon_C}. \quad (14.68)$$

Ako je $\varepsilon_B>(\varepsilon_A+\varepsilon_C)/2$, onda je $0<\varphi_1<90°$.

Isti izrazi za delta rozetu, prema slici 14.23c, glase:

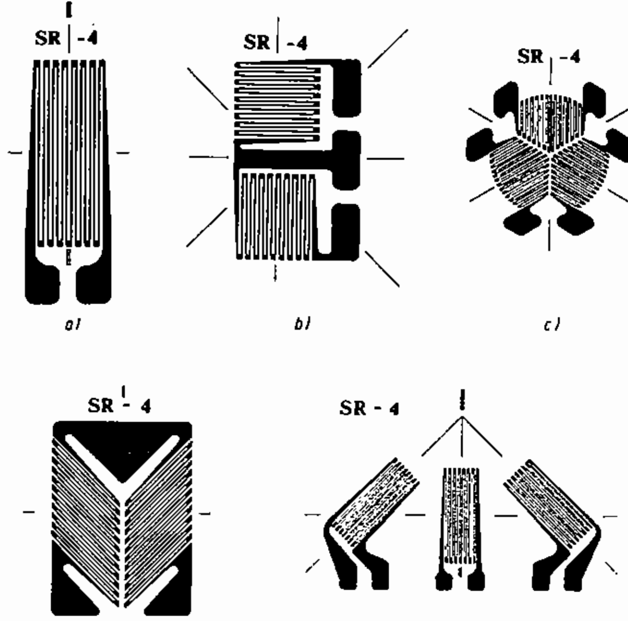
$$\varepsilon_{1,2}=\frac{1}{3}\left\{\varepsilon_A+\varepsilon_B+\varepsilon_C\pm\sqrt{2\left[(\varepsilon_A-\varepsilon_B)^2+(\varepsilon_B-\varepsilon_C)^2+(\varepsilon_C-\varepsilon_D)^2\right]}\right\} \tag{14.70}$$

$$\sigma_{1,2}=\frac{E}{3(1-\nu^2)}\left\{(1+\nu)(\varepsilon_A+\varepsilon_B+\varepsilon_C)\pm(1-\nu)\sqrt{2\left[(\varepsilon_A-\varepsilon_B)^2+(\varepsilon_B+\varepsilon_C)^2+(\varepsilon_C-\varepsilon_D)^2\right]}\right\} \tag{14.71}$$

$$\tan 2\varphi_1=\frac{\sqrt{3}(\varepsilon_C-\varepsilon_B)}{2\varepsilon_A-(\varepsilon_B+\varepsilon_C)}. \tag{14.72}$$

Ako je $\varepsilon_C>\varepsilon_B$, onda je $0<\varphi_1<90°$.

Umjesto da se tri odvojena tenzometra lijepe u rozetu, prema slici 14.23, tenzometri se tvornički izrađuju već spojeni u rozetu. Na taj se način osigurava točnost kutova koje osi tenzometara čine međusobno, olakšava se lijepljenje tenzometara i pojeftinjuje proizvodnja. Razni tipovi folijskih tenzometara i rozeta prikazani su na slici 14.24.



Slika 14.24. Razni oblici folijskih tenzometara i rozeta: a) jednoslojni; b) dvočlana pravokutna „T" rozeta; c) tročlana delta rozeta, razmaknuta 60°; d) dvočlana planarna rozeta, razmaknuta 60°; e) tročlana pravokutna rozeta, razmaknuta 45°

14.15. Instrumenti za mjerenje promjene otpora tenzometra

Za mjerenje promjene otpora tenzometra ΔR_T upotrebljavaju se dva instrumenta: potenciometar i Wheatstoneov most. Električna shema tih instrumenata prikazana je na slici 14.25.

Razmotrimo kako ovisi izlazni napon E potenciometra (slika 14.25a) o otporima R_1 i R_2.

Ako baterija u instrumentu stvara napon U, izlazni napon E jednak je padu napona između točaka A i B i iznosi

$$E=i\cdot R_1, \quad (14.73$$

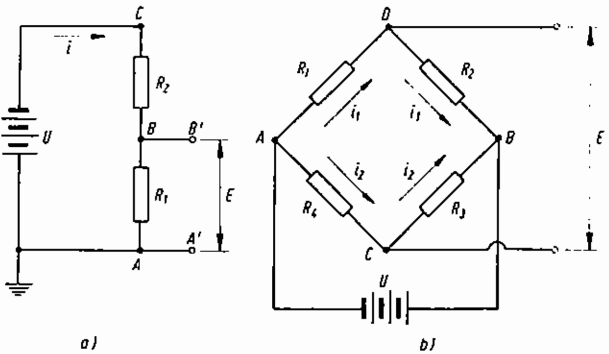
gdje je i električna struja a R_1 omski otpor.

Struja i određena je Ohmovim zakonom i iznosi

$$i=\frac{U}{R_1+R_2}, \tag{14.74}$$

što uvršteno u izraz (14.73) daje

$$E=\frac{R_1}{R_1+R_2}U. \tag{14.75}$$



Slika 14.25. a) Potenciometar, b) Wheatstoneov most

Ako se otpori R_1 i R_2 promijene za iznos $\Delta R_1+\Delta R_2$, promijenit će se i izlazni napon za iznos ΔE, pa će biti

$$E+\Delta E=\frac{R_1+\Delta R_1}{R_1+\Delta R_1+R_2+\Delta R_2}U. \tag{14.76}$$

Ako od izraza (14.76) oduzmemo (14.75) i sredimo, dobit ćemo

$$\Delta E=\left[\frac{R_1+\Delta R_1}{R_1+\Delta R_1+R_2+\Delta R_2}-\frac{R_1}{R_1+R_2}\right]U. \tag{14.77}$$

Uvođenjem oznake $r=R_2/R_1$ gornji izraz možemo napisati u obliku

$$\Delta E=\frac{[r/(1+r^2)]\ (\Delta R_1/R_1-\Delta R_2/R_2)}{1+[1/(1+r^2)][\Delta R_1/R_1-r(\Delta R_2/R_2)]} \tag{14.78}$$

odnosno

$$\Delta E=\frac{r}{(1+r)^2}\left(\frac{\Delta R_1}{R_1}-\frac{\Delta R_2}{R_2}\right)(1-\eta)U, \tag{14.79}$$

gdje je

$$\eta=1-\frac{1}{1+[1/(1+r)][\Delta R_1/R_1+r(\Delta R_2/R_2)]}. \tag{14.80}$$

Nelinearni član η vrlo je malen i može se zanemariti u području malih deformacija, ali ga treba uzeti u obzir u području velikih deformacija.

Pri mjerenju obično se uzima $R_2=$konst., $R_1=R_T$ i $\Delta R_1=\Delta R_T$. U tom je slučaju

$$\Delta E=\frac{r}{(1+r)^2}\frac{\Delta R_T}{R_T}U. \tag{14.81}$$

Mjereći promjenu izlaznog napona ΔE, možemo mjeriti promjenu otpora tenzometra $\Delta R_T/R_T$, a zatim pomoću izraza (14.66) odrediti deformaciju ε koju mjeri tenzometar.

Kod Wheatstoneova (Vistonovog) mosta pad napona između točaka A i B iznosi U_{AB}. Pad napona između A i D jest

$$U_{AD}=\frac{R_1}{R_1+R_2}U, \tag{14.82}$$

dok je pad napona između A i C dan izrazom

$$U_{AC}=\frac{R_4}{R_3+R_4}U. \tag{14.83}$$

Sada je razlika napona između točaka C i D jednaka izlaznom naponu E, tj.

$$E=U_{CD}=U_{AD}-U_{AC}. \tag{14.84}$$

Kad uvrstimo izraze (14.82) i (14.83) u (14.84) i sredimo, dobit ćemo

$$E=\frac{R_1R_3-R_2R_4}{(R_1+R_2)+(R_3+R_4)}U. \tag{14.85}$$

Na početku mjerenja dovodimo most u ravnotežu, tj.

$$R_1R_3=R_2R_4 \tag{14.86}$$

odnosno

$$R_1:R_2=R_4:R_3. \tag{14.86a}$$

Ako se otpori R_1, R_2, R_3 i R_4 promijene za iznos ΔR_1, ΔR_2, ΔR_3 i ΔR_4, izlazni napon ΔE bit će

$$\Delta E=\frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)^2}\left(\frac{\Delta R_1}{R_1}-\frac{\Delta R_2}{R_2}+\frac{\Delta R_3}{R_3}-\frac{\Delta R_4}{R_4}\right). \tag{14.87}$$

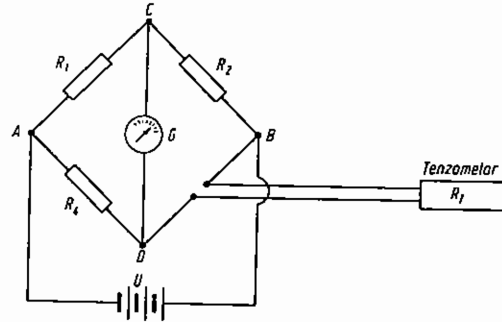
Taj je izraz izveden uz pretpostavku da je u početku most bio uravnotežen, tj. da je ispunjen uvjet (14.86).

Wheatstoneov most možemo upotrijebiti s jednim, dva ili četiri aktivna tenzometra. Ako imamo jedan aktivan tenzometar, npr. $R_3=R_T$, izlazni je napon dan izrazom

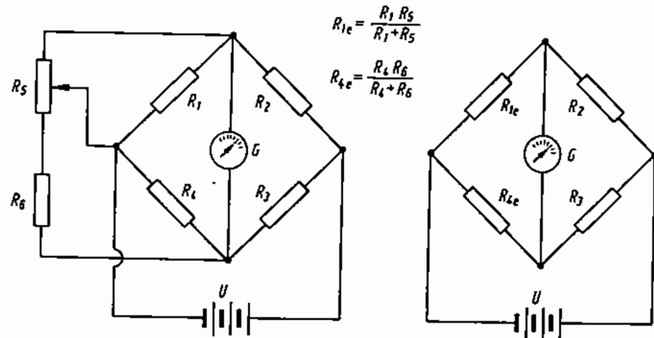
$$\Delta E=\frac{r}{(1+r)^2}\cdot\frac{\Delta R_T}{R_T}, \tag{14.88}$$

gdje je $r=R_2/R_1$.

Spoj tenzometra u most prikazan je na slici 14.26. Galvanometar G mjeri izlazni napon između točaka C i D. Na slici 14.27 prikazan je Wheatstoneov most s promjenljivim otporima R_1 i R_4 kojima se može izvesti početno uravnotežavanje mosta.



Slika 14.26. Priključenje tenzometra na Wheatstoneov most



Slika 14.27. Wheatstoneov most s promjenljivim otporima

Na kraju napomenimo da je sve što je izneseno u ovom poglavlju vrlo kratak uvod u eksperimentalnu analizu naprezanja. Mnogi važni utjecaji i činioci nisu spomenuti i objašnjeni. Onaj tko se želi baviti tom problematikom treba da se bolje upozna s navedenim metodama.

LITERATURA

1. *I. Alfirević*: Nauka o čvrstoći I, Sveučilišna naklada Liber, Zagreb 1978.
2. *I. Alfirević, S. Jecić*: Fotoelasticimetrija. Sveučilišna naklada Liber, Zagreb 1983.
3. *I. Alfirević*: Nauka o čvrstoći, Tehnička enciklopedija 9. svezak, Jugoslavenski leksikografski zavod „Miroslav Krleža", Zagreb 1984.
4. *D. Bazjanac*: Nauka o čvrstoći, Tehnička knjiga, Zagreb 1973.
5. *V. Brčić*: Otpornost materijala, Beogradski grafički zavod, Beograd 1970.
6. *J. McD. Baxter Brown*: Introductory Solid Mechanics, John Wiley, New York 1973.
7. *E. F. Byars, R. D. Snyder*: Engineering Mechanics of Deformable Bodies, International Textbook Company, Scranton 1969.
8. *A. V. Darkov, G. S. Šapiro*: Soprotivlenie materialov, Vysšaja škola, Moskva 1969.
9. *D. C. Drucker*: Introduction to Mechanics of Deformable Solids, Mc Graw Hill, New York 1967.
10. *V. I. Feodosjev*: Soprotivlenie materialov, Nauka, Moskva 1974.
11. *V. I. Feodosjev*: Izabranie zadači i voprosy po soprotivleniu materialov, Nauka, Moskva 1974.
12. *A. P. Filin*: Prikladnaja mehanika tverdogo deformiruemogo tela, tom I, Nauka, Moskva 1975.
13. *W. Flügge*: Festigkeitslehre. Springer Verlag. Berlin 1967.
14. *A. Higdon, E. H. Ohlsen, W. B. Stiles, J. A. Weese*: Mechanics of Materials, John Wiley, New York 1967.
15. *I. J. Levinson*: Mechanics of Materials. Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1963.
16. *N. O. Myklestad*: Statics of Deformable Bodies, The Mc Millan Co., New York 1966.
17. *G. S. Pisarenko i drugi*: Soprotivlenie materialov, Višča škola, Kijev 1973.
18. *E. P. Popov*: Introduction to Mechanics of Solids, Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1968.
19. *D. Rašković*: Otpornost materijala. Građevinska knjiga. Beograd 1975.
20. *K. A. Reckling*: Mechanik II – Festigkeitslehre, Viewig Akademische Verlagsgesellschaft, Braunschweig 1969.
21. *G. L. Rogers*: Mechanics of Solids, John Wiley, New York 1964.
22. *I. H. Shames*: Mechanics of Deformable Solids, Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1964.
23. *F. R. Shanley*: Mechanics of Materials, Mc Graw Hill, New York 1967.
24. *F. B. Seely, J. O. Smith*: Resistance of Materials, John Wiley, New York 1956.
25. *A. F. Smirnov*: Soprotivlenie materialov, Vysšaja škola, Moskva 1975.
26. *S. Timoshenko*: History of Strenth of Materials, Mc Graw-Hill, New York 1953.
27. *S. Timošenko*: Otpornost materijala I. Građevinska knjiga, Beograd 1956.
28. *I. Alfirević*: Viša nauka o čvrstoći. Sveučilišna naklada Liber. Zagreb 1975.

KAZALO